УДК 517.52

ОБ ОБРАТНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ХАРДИ

Ернияшова Жадыра Изгалиевна
zhadira-90@mail.ru, yerniyashovazhadyra@gmail.com
Докторант механико-математического факультета им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Н.А. Бокаев

Пусть μ - неотрицательная мера Бореля на $I := (a,b) \subseteq \mathbb{R}$. $\mathcal{M}(\mathrm{I},\mu)$ - множество μ - измеримых функции на I и $\mathcal{M}^+(\mathrm{I},\mu)$ - множество неотрицательных μ - измеримых функции на I .

$$\|f\|_{p,E,\mu} := \left(\int_E |f(y)|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < +\infty$$

Хорошо известно следующее неравенство типа Харди [1].

Теорема А. Пусть $1 < p \le q \le \infty$, $v \in \mathcal{M}^+(0,+\infty)$ и $w \in \mathcal{M}(0,+\infty)$. Обозначим через

$$Hf(t) := \int_0^t f(s)ds\,,\ f \in \mathcal{M}^+(0,+\infty),\ t \ge 0 .$$

Тогда неравенство

$$\|Hf(t)\|_{q,v,(0,+\infty)} \le \|f\|_{\mathrm{p,w},(0,+\infty)}$$

выполнятся для всех $f \in \mathcal{M}^+(0,+\infty)$ тогда и только тогда, когда

$$A(p,q) := \sup_{t>0}\left[\left(\int_t^\infty v(s)ds\right)^{1/q}\left(\int_0^t \mathrm{w(x)}^{1-p'}dx\right)^{1/p'}\right] < \infty .$$

Мы будем рассматривать вопрос о выполнении обратного неравенства Харди, то есть охарактеризуем справедливость следующих неравенств

$$\|g\omega\|_{p,(0,\infty)} \le c\left\|\upsilon(t)\left(\int_t^\infty g(y)dy\right)\right\|_{q,(0,\infty)} \tag{1}$$

и

$$\|g\omega\|_{p,(0,\infty)} \le c\left\|\upsilon(t)\left(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in(t,\infty)} g(y)\right)\right\|_{q,(0,\infty)} \tag{2}$$

для неотрицательных измеримых функций на $(0,\infty)$.

Теорема 1. Предположим, что $0 < q \le p \le 1$. Пусть ω и υ весовые функции, определенные на $(0,\infty)$. И пусть $\|\upsilon\|_{q,(0,t)} < +\infty$ для всех $t \in (0,\infty)$. Тогда неравенство (1) выполняется для всех неотрицательных измеримых g тогда и только тогда, когда

$$A_1 := \sup_{t\in(0,\infty)} \|\omega\|_{p',(0,t)} \|\upsilon\|^{-1}_{q,(0,t)} < +\infty.$$

Наилучшая константа c в (1) удовлетворяет условию $c \approx A_1$.

При доказательстве теоремы 1 используется следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1[2]. Пусть φ - неотрицательная, невозрастающая, конечная и непрерывная слева функция на (a,b). Тогда существует строго возрастающая последовательность $\{x_k\}_{k=N-1}^{M}$; $-\infty \le N \le M \le +\infty$, с элементами из замыкания интервала (a,b) такая, что:

i) если $M < +\infty$ тогда $\varphi(\mathrm{x}_M) > 0$, если $\mathrm{x}_M < b$ тогда $\varphi(\mathrm{x}) = 0$ для всех $x \in (\mathrm{x}_M, \mathrm{b})$; если $N > -\infty$ тогда $x_{N-1} := 0$;

ii) $\varphi(\mathrm{x}_{k-1}+) \le 2\varphi(\mathrm{x}_k)$, если $N \le k \le M$;

iii) $2\varphi(\mathrm{x}_k+) \le \varphi(\mathrm{x}_{k-1})$, если $N < k < M$.

Определение 1. Пусть φ - неотрицательная, невозрастающая, конечная и непрерывная слева функция на (a,b). Строго возрастающая последовательность $\{x_k\}_{k=N-1}^{M}$; $-\infty \le N \le M \le +\infty$, называется последовательностью дискретизации функции φ, если он удовлетворяет условиям (i)–(iii) по Лемме 1.

Теорема B[2]. Пусть ν - неотрицательная мера Бореля на $I := (a,b)$ такая, что функция $\varphi(\mathrm{t}) = \nu(\mathrm{a}, \mathrm{t}]$ конечная на I. Если $\{x_k\}_{k=N}^{M+1}$ последовательность дискретизации функции φ, тогда

$$\int_{(a,b)} h(t)d\nu \approx \sum_{k=N}^{M} h(\mathrm{x}_k)\nu(\mathrm{a}, \mathrm{x}_k]$$

для всех неотрицательных и невозрастающих функции h на I.

Пусть φ неотрицательная, неубывающая, конечная и непрерывная справа функция на (a,b). Используя $\{x_k\}_{k=N}^{M+1}$ последовательность дискретизации функции, мы определим последовательность интервалов $\{J_k\}_{k=N}^{M}$ следующим образом:

$$J_i = (x_i, x_{i+1}], \text{ если } N \le i < M \text{ и } J_M = (x_M, \mathrm{b}], \text{ если } M < +\infty. \quad (3)$$

Теорема C [2]. Пусть $0 < q \le \infty$. Предположим, что υ весовая функция на $(0,\infty)$. Пусть υ такова,

что функция $\varphi(\mathrm{t}) = \|\upsilon\|^q_{q,(0,\mathrm{x}_k)}$ конечная на $(0,\infty)$. Если $\{x_k\}_{k=N}^{M+1}$ последовательность

дискретизации функции φ, тогда

$$\left\|\upsilon(t)\int_t^\infty g(y)dy\right\|_{q,(0,\infty)} \approx \left(\sum_{k=N}^{M}\left(\int_{J_k} g(y)dy\right)^q \|\upsilon\|^q_{q,(0,x_k)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

и

$$\left\|\upsilon(t)\|g\|_{\infty,(0,\infty)}\right\|_{q,(0,\infty)} \approx \left(\sum_{k=N}^{M}\|g\|^q_{\infty,J_k}\|\upsilon\|^q_{q,(0,\mathrm{x}_k)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

для всех неотрицательных измеримых g на $(0,\infty)$, где $\{J_k\}_{k=N}^{M}$ определяется по (3).

Список использованных источников

1. A.Kufner, L.-E.Persson, Weighted inequalities of Hardy type, World Scientific Publishing Co, Singapore, 2003
2. W.D. Evans, A. Gogatishvili, and B. Opic, The reverse Hardy inequality with measures V.11 (2008), no. 1, 43-74.

ОӘЖ 517.98

МАТРИЦАЛЫҚ ОПЕРАТОРЛАР КЛАСЫ ҮШІН ҮШ САЛМАҚТЫ ДИСКРЕТТІ ИТЕРАЦИЯЛАНҒАН ХАРДИ ТИПТІ ТЕҢСІЗДІКТЕР

Жаңабергенова Назерке Салменқызы
zhanabergenova.ns@gmail.com
Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің 2-курс докторанты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекші – Темирханова А.М.