УДК 517.98

ВЕСОВАЯ ОЦЕНКА ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ТИПА ГИЛЬБЕРТА-СТИЛТЬЕСА

Жумабек Джамиль Акатулы
tommazo.campanella@gmail.com
Студент 4 курса специальности 5В060100 –Математика
Механико-математический факультет
ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – А. Темирханова

Пусть $I = (0,\infty)$, $1 < p,\ q < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$. Пусть u и ϑ – весовые функции, то есть неотрицательные, локально суммируемые функции на I. Через $L_{p\vartheta} = L_{p\vartheta}(I)$ обозначим пространство измеримых функций f для которых конечна норма

$$\|f\|_{p\vartheta} = \left(\int_0^\infty |f(x)\vartheta(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \le p < \infty.$$

В начале XX века было доказано известное неравенство Гильберта о двойных рядах (см [1]):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k g_n}{k+n} < \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n{}^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}, \qquad p > 1, \tag{1}$$

где $f_k, g_n \ge 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_k{}^p < +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n{}^{p'} < +\infty$, а также его интегральный случай следующего вида:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y}dxdy < \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\left(\int_0^\infty f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty g^{p'}(y)\,dy\right)^{\frac{1}{p'}}, \qquad p > 1, \tag{2}$$

где $f,g \ge 0$, $\int_0^\infty f^p(x)dx < +\infty$, $\int_0^\infty g^{p'}(x)dx < +\infty$ и $\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}$ – наилучшая константа в неравенствах (1) и (2).

Неравенство (2) эквивалентно неравенству вида:

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{f(x)}{x+y}dx\right)^p dy\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\left(\int_0^\infty f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad f(x) \geq 0, \qquad (3)$$

выполнение, которого означает ограниченность интегрального оператора типа Харди-Стилтьеса вида:

$$\mathrm{T}f(x) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{(x+t)}dt$$

из $L_p(I)$ в $L_p(I)$ (см. [2]).

Неравенства (1) и (2) и их обобщения сыграли фундаментальную роль в развитии многих разделов математики, и значительное внимание многих авторов было уделено неравенству (2), обратным неравенствам, и различным его обобщениям, см. например [2-5]. В работах [6], [7] были установлены ограниченность интегрального оператора Стилтьеса следующего вида

$$\mathrm{T}_\gamma f(x) = \int_0^\infty \frac{f(x)}{(x+t)^\gamma}dt, \qquad x > 0, \ \gamma > 0$$

в весовых пространствах Лебега при $1 \leq p \leq q < \infty$ и $1 < q < p < \infty$ соответсвенно.

В данной работе мы рассматриваем весовую оценку интегрального оператора следующего вида:

$$\left(\int_0^\infty |u(x)Sf(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty |f(x)\vartheta(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall f \in L_{p\vartheta}, \qquad (4)$$

где

$$Sf(x) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{(\varphi(x)+\varphi(t))^\gamma}dt \qquad (5)$$

интегральный оператор типа Гильберта-Стилтьеса, $\gamma > 0$ и $\varphi(x)$ – локально абсолютно непрерывная и возрастающая функция на I , такая что:

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = +\infty$$

Целью работы является установить критерий выполнения весового неравенства (4) для оператора (5). Отметим, что при $\gamma = 1$, $\varphi(x) = x$ и $q = p$ неравенство (4) совпадает с неравенством (3). А при $\varphi(x) = x$ оператор S совпадает с интегральным оператором Стилтьеса T_γ.

Оператор (5) для неотрицательной функции f можно представить в виде суммы двух интегральных операторов типа Харди с верхним и нижним пределами интегрирования следующим образом

$$Sf(x) = \int_0^\infty \frac{f(s)ds}{(\varphi(x)+\varphi(s))^\gamma} \approx \frac{1}{\varphi^\gamma(x)}\int_0^{\varphi(x)} f(s)ds + \int_{\varphi(x)}^\infty \frac{f(s)}{\varphi^\gamma(s)}ds = S_1f(x) + S_2f(x).$$

Тогда выполнение неравенства (4) характеризуется разбиением на два весовых неравенства типа Харди для $f \geq 0$.

В работе [8] были рассмотрены выполнение неравенства (4) для интегральных операторов типа Харди S_1, S_2 при $\gamma = 0$

<u>Замечание</u>. Символ $M \ll K$ означает, что $M \leq cK$, где константа $c > 0$ зависит только от несущественных параметров. Если $M \ll K \ll M,$ то $M \approx K$

Приведем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \leq q < \infty$. *Тогда неравенство* (4) *выполняется тогда и только тогда*, *когда* $D = D_1 + D_2 < +\infty$, *где*

$$D_1 = \sup_{x>0}\left(\int_x^\infty \left(\frac{u(t)}{\varphi^\gamma(t)}\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\varphi(x)} \vartheta^{-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$D_2 = \sup_{x>0}\left(\int_0^x u^q(t)dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\varphi(x)}^\infty \left(\frac{\vartheta(t)}{\varphi^\gamma(t)}\right)^{-p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Кроме того, $D \approx C$, *где* C *– наименьшая константа в* (4).

Список использованных источников

1. Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G. Inequalities, Chapter. 9, Cambridge Univ. Press, London, 1952.
2. Chen Q., Yang B. A survey on the study of Hilbert-type inequalities // Journal of Inequalities and Applications № 302, 2015.
3. Jichang K., Debnath L. On new generalization of Hilbert's inequality and their applications // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2000. № 245 P. 248-265.
4. Mingzhe G.. On Hilbert's inequality and its applications // Journal of Mathematical Analysis and Applications.1997. № 212. P. 316-323.
5. Jichang K. On new extensions of Hilbert's integral inequality // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1999. Vol. 235, №. 2, P. 608-614.
6. Andersen K.F. Weighted inequalities for the Stieltjes- transformation and Hubert's double series // Proc. Roy. Soc Edinburgh. 1980. №. 1-2. P. 75-84.
7. Sinnamon G. A note on the Stieltjes transformation // Proc. Roy. Soc Edinburgh. 1988, 110A. P. 73-78,
8. Stepanov V.D., Ushakova E.P. On integral operators with variable limits of integration // Proc. Steklov Inst. Math. 2001, № 232. P. 290-309.