ГРНТИ: 27.01.27

ЕКІ ӨЛШЕМДІ КЕУЕКТІ ОРТАДАҒЫ СТОКС ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІНІҢ ТРАЕКТОРИЯЛЫҚ АТТРАКТОРЛАРЫНЫҢ ОРТАШАЛАНУЫ

Төлеубай Алтын Мұқанқызы
Altyn.15.94@mail.ru

Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ-нің 2 курс докторанты, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан
Ғылыми жетекші-ф-м. ғ.д., қауымдастырылған профессор, К. А. Бекмаганбетов

Дербес туындылы диссипативті теңдеулер үшін траекториялық аттракторлар теориясы әзірленген[1]. Бұл тәсілге сәйкес Коши есептері үшін шешімдерінің жалғыздығы әлі дәлелденбеген (мысалы, 3D Навье-Стокс жүйесі) немесе орындалмаған (мысалы, реакция-диффузиялық теңдеулер жүйесі) эволюциялық теңдеулердің шешімдерінің ұзақ мерзімді әрекетін зерттеуде маңызды. Аттракторлар диссипативті сызықты емес эволюция теңдеулерінің шешімдерінің уақыт шексіздікке ұмтылғандағы әрекетін сипаттайды. Олар динамикалық жүйелердің ең маңызды шектеуші объектілерін, яғни эволюциялық теңдеулермен басқарылатын модельдің барлық динамикасын сипаттайтын траекториялар жиындарын көрсетеді. G_0 – аймақ болсын, мұндағы $Y = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^2$, тиесілі, $\overline{G}_0$ бұл диффеоморфты шарға тең компакт болып табылады.

$\delta > 0$ және M-кез келген жиын болсын, біз келесі белгілеулерді енгіземіз: $\delta M = \left\{x : \delta^{-1}x \in M\right\}$. $j \in Z^2$ үшін анықтаймыз

$$P_\varepsilon^j = \varepsilon j, Y_\varepsilon^j = P_\varepsilon^j + \varepsilon Y, G_\varepsilon^j = P_\varepsilon^j + \varepsilon G_0.$$

Әрі қарай, ауданды $\tilde{\Omega}_\varepsilon = \left\{x \in \Omega : \rho(x, \partial\Omega) > \sqrt{2}\varepsilon\right\}$ және рұқсат етілген индекстер жинағынанықтаймыз

$$\gamma_\varepsilon = \left\{j \in Z^n : G_\varepsilon^j \cap \overline{\tilde{\Omega}}_\varepsilon \neq \varnothing\right\}$$

Назар аударыңыз, $|\gamma_\varepsilon| \cong d\varepsilon^{-2}$ мұнда, $d > 0 -$ тұрақты. Келесі ауданды қарастырайық,

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{G}_\varepsilon G_\varepsilon = U_{j \in \gamma_\varepsilon} G_\varepsilon{}^j.$$

Стокс теңдеулерінің автономды екіөлшемді жүйесі үшін келесі бастапқы-шектік есептің траекториялық аттракторларының асимптотикалық әрекетін зерттейміз.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \nu \Delta u_\varepsilon + (u_\varepsilon, \nabla) u_\varepsilon = g_0\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}\right), x \in \Omega_\varepsilon, \\ (\nabla, u_\varepsilon) = 0, x \in \Omega_\varepsilon, \\ \nu \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} + B\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) u_\varepsilon = 0, x \in \partial G_\varepsilon, t \in (0, +\infty), \\ u_\varepsilon = 0, x \in \partial\Omega, \\ u_\varepsilon(0) = U(x), x \in \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Мұнда $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x,t) = (u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2)$, $g = g(x,y) = (g^1, g^2) \in [L_2(\Omega \times \mathbb{R}^2)]^2$, n- шекараның сыртқы нормаль векторы және $\nu > 0$.

Әрі қарай

$$B(s) = \begin{pmatrix} b^1(s) & 0 \\ 0 & b^2(s) \end{pmatrix},$$

әрбір $\mathbb{R}^2$-де $b^k(s) \in C(\mathbb{R}^2)$ айнымалы функция және $b^k(s) -$ 1-периодты болып табылатын және шартты қанағаттандыратын

$$\int_{\partial G_0} b^k(s)\, d\sigma = 0,$$

мұнда $\sigma -$қисық ұзындығының элементі $\partial G_0, k = 1{,}2.$

Векторлық функция үшін $g(x,y)$ және ол y_1 және y_2 айнымалыларында $1 -$ периодты және $g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ $[L_2(\Omega)]^2$кеңістігінде $\overline{g}(x)$ орташаланған мәні бар деп $\varepsilon \to 0+$ есептейміз.

Біз топологиядағы ізделінді бастапқы-шекаралық есептің $\varepsilon \to 0+$ траекториялық аттракторлары $\mathfrak{A}_\varepsilon$ келесі бастапқы-шекаралық есептің траекториялық аттракторына $\overline{\mathfrak{A}}$ жинақталатының дәлелдедік $\Theta_+^{loc} = L_2^{loc}(\mathbb{R}_+, [L_2(\Omega)]^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial t} - \nu \sum\limits_{i,l=1}^{2} \hat{a}_{il} \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_l} + (u_0, \nabla) u_0 + V u_0 = \tilde{g}(x), & x \in \Omega, \\ (\nabla, u_0) = 0, & x \in \Omega, \\ u_0 = 0, & x \in \partial\Omega \\ u_0(0) = U(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

Осыдан

$$\hat{a}_{il} = \int_{Y \setminus G_0} \left(\frac{\partial N_l(\zeta)}{\partial \zeta_i} + \delta_{il}\right) d\zeta, \qquad \tilde{g}(x) = \int_{Y \setminus G_0} g(x,\zeta)\, d\zeta,$$

$$m_k = -\int_{\partial G_0} b^k(\zeta) M^k(\zeta)\, d\sigma, \qquad V = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix},$$

мұнда ζ үшін $M^k(\zeta), N_l(\zeta)$ 1-периодтық функциялар және шарттарды қанағаттандырады:

$$\Delta M^k = 0 \;\; Y \backslash G_0 - \text{де}, \qquad \frac{\partial M^k}{\partial n} = -b^k(\zeta) \;\; \partial G_0 - \text{де},$$

$$\Delta N_l = 0 \quad Y \backslash G_0 - \text{де}, \qquad \frac{\partial N_l}{\partial n} = -n_l \quad \partial G_0 - \text{де}.$$

Пайдаланған әдебиеттер тізімі

1. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Attractors for equations of mathematical physicsProvidence (RI)Am. Math. Soc.2002363
2. А. В. Бабин и М. И. Вишик, Аттракторы эволюционных уравнений, Северная Голландия, 1992.
3. М. И. Вишик, В. В. Чепыжов, “Аттракторы периодических процессов и оценки их размерности”, Матем. заметки, 57:2 (1995), 181-202