УДК 532.529

АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ О СТРУКТУРЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Калимуллиева Дина Аскаровна
dinashka-00@mail.ru
Магистрант 1-го курса Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, механико-математического факультета, кафедра механики, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор Н.Ж. Джайчибеков

Для численного расчета структуры ударной волны необходимо дифференциальные уравнения газовой динамики аппроксимировать в конечно-разностные алгебраические уравнения. Этими уравнениями являются уравнения неразрывности, движения и энергии, которые описывают соответствующие законы сохранения массы, импульса и энергии. При этом нужно учитывать соотношения Гюгоньо на ударной волне, а именно связь между параметрами газа (плотности, давления, скорости и внутренней энергии) перед фронтом ударной волны и за ее фронтом.

В нашем случае постановка задачи следующее: рассматривается одномерная задача потока газа с граничными условиями, соответствующие условиям Гюгоньо.

Здесь рассмотрено применение в динамике разреженного газа эвристической модели течения, ранее разработанной для описания течения газа с твердыми частицами [1]. В этой модели молекулы газа подразделяются на 2 множества, каждое из которых описывается континуально, причем столкновения молекул из одного множества порождают напряжения и тепловые потоки в этом множестве, а столкновения молекул разных множеств, приводят к переходу частиц из одного множества в другое. А именно, частицы одного из множеств (назовем их s-частицами) после столкновения их с частицами другого множества (t-частицами) переходят в множество последних.

Данный процесс является стационарным, однако для решения задачи мы применяем метод установления по времени, решая уравнения нестационарного процесса. Тогда уравнения одномерного движения будут иметь следующий вид.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho_s}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho_s u_s)}{\partial x} = -I \\ \dfrac{\partial \rho_t}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho_t u_t)}{\partial x} = I \\ \dfrac{\partial(\rho_s u_s)}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho_s u_s^2 + p_s)}{\partial x} = -I u_s \\ \dfrac{\partial(\rho_t u_t)}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho_t u_t^2 + p_t)}{\partial x} = I u_s \\ \dfrac{\partial(\rho_s E_s)}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho_s u_s E_s + p_s u_s)}{\partial x} = -I E_s \\ \dfrac{\partial(\rho_t E_t)}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho_t u_t E_t + p_t u_t)}{\partial x} = I E_s \end{cases}$$

где, $\rho, u -$ плотность и скорость компонентов (индекс указывает соответствующий компонент), p – давление компонентов, E –полная энергия хаотического движения молекул, c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, I – масса молекул одного множества, столкнувшихся с молекулами другого множества в единичном объеме в единицу времени. Приближенно будем полагать

$$I = \frac{\pi d^2}{m} \rho_s \rho_t \sqrt{(u_s - u_t)^2 + c_s^2 + c_t^2} \; .$$

Здесь $m -$ масса молекул, $d -$ их диаметр. Средний модуль скорости хаотического движения для компонент вычисляется

$$c_i = \sqrt{16 p_i \Big/ (3\pi(\kappa - 1)\rho_i)} \, .$$

Для каждого из компонентов считается справедливым уравнение состояния

$$p_i = (\kappa - 1)\rho_i U_i$$

где U – кинетическая энергия хаотического движения молекул, κ – показатель адиабаты, причем $\kappa = 5/3$, если вращение частиц не учитывается, и $\kappa = 4/3$, если энергия хаотического движения равномерно распределена по вращательным и поступательным степеням свободы.

Для расчета структуры скачка с помощью приведенных уравнений сформулируем граничные условия:

при $x \to -\infty \quad u_s \to u_{s-}, \quad \rho_s \to \rho_{s-}, \quad U_s \to U_{s-}, \quad \rho_t \to 0;$
и при $x \to +\infty \quad u_t \to u_{t+}, \quad \rho_t \to \rho_{t+}, \quad U_t \to U_{t+}, \quad \rho_s \to 0.$

Вследствие сохранения массы, импульса и энергии потока должны выполняться условия динамической совместности:

$$\frac{u_{t+}}{u_{s-}} = \frac{\rho_{s-}}{\rho_{t+}} = \frac{2}{(\kappa+1)M^2} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}, \quad \frac{p_{t+}}{p_{s-}} = \frac{2\kappa M^2}{\kappa+1} - \frac{\kappa-1}{\kappa+1},$$

где $M = \dfrac{u_{s-}}{\sqrt{\kappa p_{s-} / \rho_{s-}}}$ - число Маха потока перед скачком.

Приведенная выше система уравнений в разностном виде будут записаны следующим образом [2]:

$$\begin{cases}
\dfrac{(\rho_s)_m^{n+1} - (\rho_s)_m^n}{\tau} + \dfrac{(\rho_s u_s)_{m+1}^n - (\rho_s u_s)_m^n}{h} = -I_m^n \\
\dfrac{(\rho_t)_m^{n+1} - (\rho_t)_m^n}{\tau} + \dfrac{(\rho_t u_t)_{m+1}^n - (\rho_t u_t)_m^n}{h} = I_m^n \\
\dfrac{(\rho_s u_s)_m^{n+1} - (\rho_s u_s)_m^n}{\tau} + \dfrac{(\rho_s u_s^2 + p_s)_{m+1}^n - (\rho_s u_s^2 + p_s)_m^n}{h} = -(I u_s)_m^n \\
\dfrac{(\rho_t u_t)_m^{n+1} - (\rho_t u_t)_m^n}{\tau} + \dfrac{(\rho_t u_t^2 + p_t)_{m+1}^n - (\rho_t u_t^2 + p_t)_m^n}{h} = (I u_s)_m^n \\
\dfrac{(\rho_s E_s)_m^{n+1} - (\rho_s E_s)_m^n}{\tau} + \dfrac{(\rho_s u_s E_s + p_s u_s)_{m+1}^n - (\rho_s u_s E_s + p_s u_s)_m^n}{h} = -(I E_s)_m^n \\
\dfrac{(\rho_t E_t)_m^{n+1} - (\rho_t E_t)_m^n}{\tau} + \dfrac{(\rho_t u_t E_t + p_t u_t)_{m+1}^n - (\rho_t u_t E_t + p_t u_t)_m^n}{h} = (I E_s)_m^n
\end{cases}$$

где,

$$I_m^n = \frac{G(\rho_s)_m^n (\rho_t)_m^n}{\rho_s^0 d} \sqrt{\left((u_s - u_t)^2\right)_m^n + \left(C_s^2\right)_m^n + \left(C_t^2\right)_m^n}.$$

Здесь $G = \dfrac{\pi d^2}{m}$, $\tau -$ шаг по времени, $h -$ шаг по координате, $m, n -$ нумерация узлов по направлению x и t.

Рекуррентные формулы для вычисления искомых величин приводятся ниже:

$$
\begin{cases}
(\rho_s)_m^{n+1} = (\rho_s)_m^n - \dfrac{\tau}{h}\left((\rho_s u_s)_{m+1}^n - (\rho_s u_s)_m^n\right) - \tau \cdot I_m^n \\
(\rho_t)_m^{n+1} = (\rho_t)_m^n - \dfrac{\tau}{h}\left((\rho_t u_t)_{m+1}^n - (\rho_t u_t)_m^n\right) + \tau \cdot I_m^n \\
(\rho_s u_s)_m^{n+1} = (\rho_s u_s)_m^n - \dfrac{\tau}{h}\left((\rho_s u_s^2 + p_s)_{m+1}^n - (\rho_s u_s^2 + p_s)_m^n\right) - \tau \cdot (I u_s)_m^n \\
(\rho_t u_t)_m^{n+1} = (\rho_t u_t)_m^n - \dfrac{\tau}{h}\left((\rho_t u_t^2 + p_t)_{m+1}^n - (\rho_t u_t^2 + p_t)_m^n\right) + \tau \cdot (I u_s)_m^n \\
(\rho_s E_s)_m^{n+1} = (\rho_s E_s)_m^n - \dfrac{\tau}{h}\left((\rho_s u_s E_s + p_s u_s)_{m+1}^n - (\rho_s u_s E_s + p_s u_s)_m^n\right) - \tau \cdot (I E_s)_m^n \\
(\rho_t E_t)_m^{n+1} = (\rho_t E_t)_m^n - \dfrac{\tau}{h}\left((\rho_t u_t E_t + p_t u_t)_{m+1}^n - (\rho_t u_t E_t + p_t u_t)_m^n\right) + \tau \cdot (I E_t)_m^n
\end{cases}
$$

Список использованных источников

1. Матвеев С.К., Джайчибеков Н.Ж., Шалабаева Б.С. Математические модели сплошных сред в динамике газовзвеси и разреженного газа. Монография. ISBN 978-9965-31-861-0, Астана, 2017 г. 146 с.
2. Матвеев С.К.Введение в вычислительнуюгидроаэромеханику.Учебное пособие.– Санкт-Петербург. ISBN 978-5-4386-1471-5,Свое издательство, 2018. – 64 с.