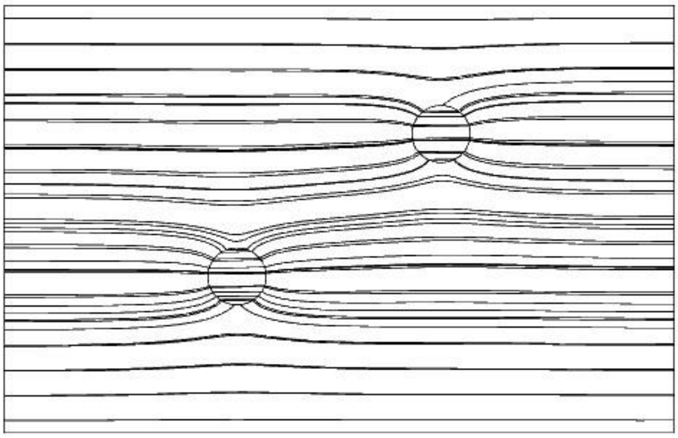

Рисунок 4.3. Искривления электрического поля.

Для компьютерного моделирования модели динамики двух капель под действием электрического поля использовался программный пакет COMSOL Multiphysics. Все программные продукты были согласованы с аналитическими решениями задачи и показали свою эффективность в согласии с физическими представлениями данного процесса.

Были получены результаты, позволяющие понимать физическую природу и закономерности влияния электрического поля на влияние нескольких капель.

Список использованных источников

1. Mandal Sh., Chakraborty S. Effect of uniform electric field on the drop deformation in simple shear flow and emulsion shear rheology // Journal of Physics of Fluids. – 2017. – Vol. 29, Issue 7. – P. 072109
2. Ahn K.H., Klingenberg D.J. Relaxation of polydisperse electrorheological suspensions // Journal of Rheology. – 1994. – Vol. 38, Issue 3. – Pp. 713-741. – DOI: 10.1122/1.550482
3. Parthasarathy M., Klingenberg D.J. Electrorheology: mechanisms and models // Material Science and Engineering: R: Reports. – 1996. – Vol. 17, Issue 2. – Pp. 57-103. – DOI: 10.1016/0927-796X(96)00191-X
4. Введение в Comsol https://www.comsol.ru/comsol-multiphysics.
5. Часть 1: Выбор направления модели: Пространство, физики, изучение COMSOL Multiphysics 1998–2018.
6. Часть 2: Структура модели: создать геометрию, добавить физику, выбор материалов. Multiphysics 1998–2018.

УДК 519.62

СХЕМА РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ СРЕДЫ МАКСВЕЛЛА.

Бабылбек Аян Абайұлы

ayan1303@gmail.com

Магистрант 2 курса кафедры МКМ, механико-математического факультета ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Научный руководитель – Букенов М.М

В статье рассмотрена численная реализация вязкоупругой среды Максвелла в двумерном случае. Проведенные расчеты показали хорошее совпадение теоретических и

численных результатов. Качественное совпадение визуализировано с помощью графиков и таблиц. Показана близость приближенного решения и тестового решения.

Рассмотрим, следуя [1] вязкоупругую среду Максвелла в двумерном случае.

Постановка задачи, в области $D_T = Dx[0,T]$

$$D = \{0 \le x_k \le l_k, k = 1,2\}\,, t \in [0,T]$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + R^* \bar{\sigma} = 0, \qquad \#(1)$$

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial t} - R\bar{v} = 0, \qquad \#(2)$$

$$B\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + C\bar{v} = \Lambda\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial t}, \qquad \#(3)$$

Здесь: $\bar{v} = \{v_1, v_2\}^T$ – вектор скоростей

$\bar{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^T$ – вектор напряжений

$\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{223} 2\varepsilon_{12}\}^T$ – вектор деформаций

$B = B^T$ – симметричная, положительно-определенная матрица, зависящая от констант Ламе, $C = C^T$ – симметричная, неотрицательно-определенная матрица, зависящая от коэффициента вязкости θ, Λ – диагональная положительно – определенная матрица, матрицы B, C, Λ – перестановочны, их вид определен в [2]

R – линейный, матрично – дифференциальный оператор

$$R = \begin{pmatrix} \nabla_1 & 0 & \nabla_2 \\ 0 & \nabla_2 & \nabla_1 \end{pmatrix}^T, \qquad R^* = -\begin{pmatrix} \nabla_1 & 0 & \nabla_2 \\ 0 & \nabla_2 & \nabla_1 \end{pmatrix}$$

$$R^* = -R^T, \qquad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad i = 1,2$$

Уравнение (1) выражает закон сохранения импульса, если обычная плотность $\rho \equiv 1$ и вектор массовых сил $\bar{f} = 0$. Соотношение (2) является следствием соотношения перемещения деформации:

$$\bar{\varepsilon} = R\bar{u} \; \#(4)$$

где $\bar{u} = \{u_1, u_2\}^T$ – вектор перемещений.

Векторы перемещения $\bar{u}$ и скорости $\bar{v}$ связаны соотношением $\bar{v} = \partial\bar{u} \setminus \partial t$.

Соотношение (3) является уравнением состояния Максвелла.

Решение системы (1) – (4) ищется в D_T. При этом $\bar{u}(x,0) = \bar{\varphi}(x)$, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x,0) = \bar{\psi}(x)$, $x \in D$ и соответственно

$$\bar{v}(x,0) = \bar{\psi}(x), \qquad \bar{\varepsilon}(x,0) = R\bar{\varphi}(x) \;\; \#(5)$$

Перемещение $\bar{u}(x,t)$ определяется из соотношения $\bar{u}(x,t) = \bar{\varphi}(x) + t\bar{\psi}(x) + \int_0^t (t-s)\bar{r}(x,s)\,ds\,, \bar{r}(x) = -R^*\bar{\sigma}$

На границе области D_T искомое решение удовлетворяет однородному краевому условию

$$\sum_{k=1}^{2} \sigma_{ik}(x,t) n_k = 0, \quad x \in \gamma \; \#(6)$$

Введем в D_T сетку $D_{\tau,h} = \{D_h x[0 \le m\tau \le T]\}$,

$$D_h = \left\{ x_i = ih,\, y_j = jh, \qquad i = 0, N, \qquad j = 0, N \;\; N_k h \;\; = l_k, \qquad k = 1,2 \right\}$$

От векторов непрерывных аргументов перейдем к векторам дискретных аргументов, заданных на сетке $D_{\tau,h}$: $v(x, m\tau) = v_h^m, x \in D_h$, $\varepsilon(x, m\tau) = \varepsilon_h^m$, $\sigma(x, m\tau) = \sigma_h^m$

Для задачи (1) – (6) рассмотрим разностную схему

$$v_{\bar{t}}^{m+1} + 0{,}5R_h^*(\sigma^m + \sigma^{m+1}) = 0, \qquad v_h^0 = \psi_n(x), \qquad x \in D_h$$
$$\varepsilon_{\bar{t}}^{m+1} - 0{,}5R_h(v^m + v^{m+1}) = 0, \qquad \varepsilon_h^0 = R_h\varphi_h(x), \qquad x \in D_h$$
$$\varepsilon_{\bar{t}}^{m+1} = B_1\sigma_{\bar{t}}^{m+1} + 0{,}5C_1(\sigma^m + \sigma^{m+1}) \qquad \#(7)$$

Здесь

$$R_h = \begin{pmatrix} L_1^- & 0 & L_2^- \\ 0 & L_2^- & L_1^- \end{pmatrix}^T, \quad R_h^* = -\begin{pmatrix} L_1^+ & 0 & L_2^+ \\ 0 & L_2^+ & L_1^+ \end{pmatrix} \quad \#(8)$$
$$L_i^- = (\cdot)\overline{x_\iota}, \qquad L_i^+ = (\cdot)x_i, \qquad i = 1{,}2, \quad v_{\bar{t}}^{m+1} = \frac{v^{m+1} - v^m}{\tau}$$

Итак, при заданных v^m, ε^m переход $m \to m + \frac{1}{2}$ будем осуществлять с помощью одномерной разностной схемы

$$v_{\bar{t}}^{m+\frac{1}{2}} + 0{,}5R_{1h}^*\left(\sigma^m + \sigma^{m+\frac{1}{2}}\right) = 0$$
$$\varepsilon_{\bar{t}}^{m+\frac{1}{2}} - 0{,}5R_{1h}\left(v^m + v^{m+\frac{1}{2}}\right) = 0 \quad \#(9)$$
$$\varepsilon_{\bar{t}}^{m+\frac{1}{2}} = B_1\sigma_{\bar{t}}^{m+\frac{1}{2}} + 0{,}5C_1\left(\sigma^m + \sigma^{m+\frac{1}{2}}\right)$$

Тогда после несложных преобразований получим для $v^{m+\frac{1}{2}}$:

$$v^{m+\frac{1}{2}} + 0{,}25\tau^2R_{1h}^*(B_1 + 0{,}5\tau C_1)^{-1}R_{1h}v^{m+\frac{1}{2}}$$
$$= v^m - 0{,}25\tau^2R_{1h}^*(B_1 + 0{,}5\tau C_1)^{-1}R_{1h}v^m - 0{,}5\tau R_{1h}^*\sigma^m$$
$$+ 0{,}5\tau R_{1h}^*(B_1 + 0{,}5\tau C_1)^{-1}(B_1 - 0{,}5\tau C_1)\sigma^m$$

Далее, при заданных $v^{m+\frac{1}{2}}, \varepsilon^{m+\frac{1}{2}}$, с помощью одномерной разностной схемы

$$v_{\bar{t}}^{m+1} + 0{,}5R_{2h}^*\left(\sigma^{m+\frac{1}{2}} + \sigma^{m+1}\right) = 0$$
$$\varepsilon_{\bar{t}}^{m+1} - 0{,}5R_{2h}\left(v^{m+\frac{1}{2}} + v^{m+1}\right) = 0 \quad \#(10)$$
$$\varepsilon_{\bar{t}}^{m+1} = B_1\sigma_{\bar{t}}^{m+1} + 0{,}5C_1\left(\sigma^{m+\frac{1}{2}} + \sigma^{m+1}\right) = 0$$

осуществляется переход $m + \frac{1}{2} \to m + 1$ и.т.д.

Были проведены численные расчеты для $\mathrm{D} = \{ 0 \leq x_k \leq 1, \ N_kh_k = 1\}, \ t \in [0, 0{,}5]$ на последовательности сеток (10x10), (20x20), (100x100), по пространственным переменным и по времени число шагов равно 100.

Результаты численной реализации данного алгоритма показали хорошее совпадение теоретических и численных результатов, что говорит о практической эффективности предложенного алгоритма.

Список использованных источников.

[1]. Букенов М.М. // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2005. – Т.8, №4. – С.289-295.

[2] Пацюк В.И. Стационирование динамических процессов в вязкоупругих средах: Дис. … канд. физ.-мат. Наук. – Новосибирск, 1982.

ОӘЖ 532.529

СҰЙЫҚ ОРТА ҮШІН 3D МОДЕЛЬДЕУ