УДК 530 145 (21)

О ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ УНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Каирленов Омирхан
kairlenov.o@mail.ru
Студент четвертого курса кафедры математического и компьютерного моделирования механико-математического факультета Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева

Научный руководитель – Сулейменов К.М.

Любой компьютер работает на битах, значение которых ограничивается нулем и единицей. Все программы хранятся в цепочке состоящих из битов. В квантовых компьютерах для хранения информации используются кубиты.

Кубит- минимальна единица квантовой информации. Состояния кубитов - $|0\rangle$ и $|1\rangle$ в одномерном случае, аналогичны, состояниям 0 и 1 классических битов. Символ «$|\rangle$» называется дираковским обозначением вектора.

В работе изучаются унитарные операторы, основные элементы квантовых вычислений из [1-3].

Основным отличием битов от кубитов, является то, что кубиты не ограничены нулем и единицей. Кубиты могут принимать любые значения отличные от $|0\rangle$ или $|1\rangle$. Составим их линейную комбинацию состояний, называемой суперпозицией:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle .$$

α и β являются комплексными числами, удовлетворяющие следующему условию:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Квантово-механический вектор состояния характеризуется двумя числами - компонентами вектора. Базисом в данном случае назван набор кубитов $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Введём векторное представление кубита. Для этих двух базисных кубитов векторное представление имеет следующий вид:

$$|0\rangle = \binom{1}{0} \qquad |1\rangle = \binom{0}{1}$$

Ортогональность в таком случае определяется как равенство нулю скалярного произведения двух векторных представлений кубитов.

Вектор столбец называется кет-вектором и обозначается правой скобкой. Сам вектор характеризуется набором чисел (компонентами) количеством равным размерности пространства. Так как эти числа комплексные, вектор состояния нельзя представить направленным отрезком.

Каждому кет-вектору $|\psi\rangle$ ставится в соответствие бра-вектор $\langle\psi|$. Рассматриваемые векторные пространства включают элементы из комплексных чисел и являются конечномерными и относятся к классу гильбертовых пространств.

Любое физическое воздействие на кубит в квантовой механике описывается линейным унитарным оператором $\hat{U}$ как $|\tilde{\psi}\rangle = \hat{U}|\psi\rangle$. Физическая система изменяется во времени, поэтому вектор состояния $|\psi\rangle$ системы будет физически представлять собой функцию времени $|\psi(t)\rangle$. Если известно, что при некотором фиксированном преобразовании – обозначим его как $U|\psi_i\rangle$ переводится в $\mathrm{U}|\psi\rangle$, тогда

$$U(\sum_i \alpha_i |\psi_i\rangle) = \sum_i \alpha_i U|\psi_i\rangle$$

Коэффициенты α_i вектора состояния условию $\sum_i |\alpha_i|^2 = 1$. Единственными линейными операторами, сохраняющими эту норму векторов, является унитарные операторы.

Определение. Оператор U называется унитарным, если $U^\dagger = U^{-1}$, где U^{-1} есть оператор, обратный U.

Рассмотрим постулат об эволюции.

Временная эволюция состояния изолированной квантовой системы описывается унитарным оператором. То есть для любой эволюции закрытой системы существует унитарный оператор U; следовательно, если начальное состояние системы есть $|\psi_1\rangle$, то по окончании развития оно будет

$$|\psi_2\rangle = U|\psi_1\rangle$$

В квантовых вычислениях унитарный оператор U, действующий на одиночный кубит, называется однокубитовым (унитарным) элементом.

Рассмотрим случай, когда точное значение классического бита не дано, известно только то, что оно равно 0 или 1 с соответствующими вероятностями p_1 и p_2, удовлетворяющие условию: $p_1 + p_2 = 1$. Эти две вероятности можно представить двумерным единичным вектором

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Пусть состояние первого провода в заданной точке равняется 0 с вероятностью p_1 и 1 – с вероятностью p_2. Пусть состояние второго провода в заданной точке равняется 0 с вероятностью q_1 и 1 – с вероятностью q_2.

$$(p_1 \quad p_2) \otimes \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \left(p_1 \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad p_2 \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} p_1 q_1 & p_2 q_1 \\ p_1 q_2 & p_2 q_2 \end{pmatrix}$$

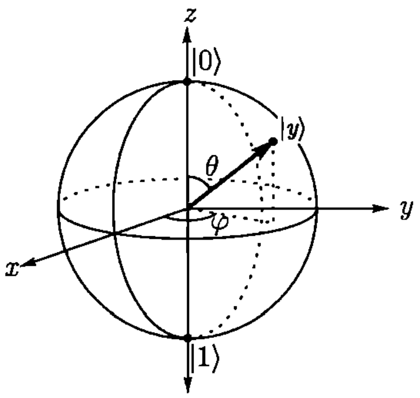
Элементами, являются только действительные и неотрицательные числа. Вернемся к состоянию квантового бита, описываемого комплексным единичным вектором $|\psi\rangle$ в двумерном гильбертовом пространстве. При определенных предельных значениях общего фазового фактора данный вектор можно записать следующим образом:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\theta}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

Подобный вектор состояния часто отображается точкой на поверхности трехмерной сферы – блоховской сферой.

Для описания вектора состояния достаточно двух вещественных параметров θ и φ, так как векторы состояния ограничены нормой 1 и эквивалентны с точностью до общего фазового множителя. Точки на поверхности представленной сферы можно выразить в декартовой системе координат следующим образом:

$$(x.y,z) = (sin\theta cos\,\varphi, sin\theta sin\varphi, cos\theta).$$



$$\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\rho' = \rho\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \rho sin\theta$$

$$\begin{cases} x = \rho' cos\varphi = \rho cos\varphi sin\theta \\ y = \rho' sin\varphi = \rho sin\varphi sin\theta \\ z = \rho cos\theta \end{cases}$$

При $\rho \equiv 1$ получим тройку $(x.y,z) = (sin\theta cos\,\varphi, sin\theta sin\varphi, cos\theta)$ блоховской сферы.

Однокубитовый квантовый элемент U преобразует квантовое состояние $|\psi\rangle$ в $U|\psi\rangle$. В терминах блоховской сферы действие U на $|\psi\rangle$ можно рассматривать как поворот блоховского вектора, соответствующего состоянию $U|\psi\rangle$. Например, элементы NOT переводит состояние $|0\rangle$ в состояние $|1\rangle$. В терминах блоховской сферы это действие можно представить поворотом на угол π вокруг оси x.

Если вычислить степень элементов Паули, можно получить унитарные операторы, соответствующие важнейшим классам однокубитовых элементов. Это поворотные элементы, которые соответствуют повороту вокруг оси x, y или z блоховской сферы. Они определяются в терминах элементов Паули, поэтому здесь уместно будет вспомнить определение элементов Паули:

$$\sigma_0 \equiv I \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 \equiv X \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sigma_2 \equiv Y \equiv \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 \equiv Z \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Поворотные элементы определяются следующим образом:

$$R_x(\theta) \equiv e^{\frac{-i\theta X}{2}}, \qquad R_y(\theta) \equiv e^{\frac{-i\theta Y}{2}}, \qquad R_z(\theta) \equiv e^{\frac{-i\theta Z}{2}}.$$

Теорема. Данные элементы преобразования $R_x(\theta), R_y(\theta), R_z(\theta)$, а также их тензорные произведения являются унитарными операторами.

Рассмотрим первый элемент преобразования:

$$R_x(\theta) \equiv e^{\frac{-i\theta X}{2}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I - isin\left(\frac{\theta}{2}\right) X = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -isin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -isin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Эрмитово-сопряженной матрицей является:

$$R^*{}_x(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

Покажем, что их произведение даст единичный оператор

$$R_x(\theta) \cdot R^*{}_x(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Аналогично для остальных операторов.

$$R_y(\theta) \equiv e^{\frac{-i\theta Y}{2}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I - isin\left(\frac{\theta}{2}\right) Y = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Эрмитово-сопряженной матрицей является:

$$R^*{}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) \cdot R^*{}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) \equiv e^{\frac{-i\theta Z}{2}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I - isin\left(\frac{\theta}{2}\right) Z = \begin{bmatrix} e^{\frac{-i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-i\theta}{2}} \end{bmatrix};$$

Эрмитово-сопряженной матрицей является:

$$R^*{}_z(\theta) = \begin{bmatrix} e^{\frac{i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\theta}{2}} \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) \cdot R^*{}_z(\theta) = \begin{bmatrix} e^{\frac{-i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-i\theta}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{\frac{i\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\theta}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим следующее тензорное произведение и проверим, является ли оно унитарным:

$$R_x(\theta) \otimes R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 & -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 & -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \end{vmatrix}$$

Эрмитово-сопряженная

$$\begin{vmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \\ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 & i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{vmatrix}
\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 & -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \\
\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
-i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 & -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
-i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2
\end{vmatrix}
$$

$$
* \begin{vmatrix}
\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \\
-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
-i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 & i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{vmatrix}
$$

Исходя из наших вычислений можно сделать вывод, что тензорное произведение унитарных матриц является унитарным.

Заключение: В ходе исследовательской работы мною было проведено ознакомление с квантовыми вычислениями и выведено практическое решение/ доказательство унитарности вышеуказанных операторов.

Литература

1. Нильсен М., Чанг И. Квантовые вычисления и квантовая информация//Пер. с англ. М.: Мир, 2006, 824 с.

2. Ф. Кайе, Р. Лафламм, М. Моска Введение в квантовые вычисления. М.: Наука, 2006, 338 с.

3. К. А. Валиев, “Квантовые компьютеры и квантовые вычисления”, УФН, 175:1 (2005), 3–39.