$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Бұл тақырып алгебра бойынша тереңдетілген бағдарламаның 8-сынып курсында қарастырылады. Орта мектепте біз осы формулаларды қолдану үшін күрделі тапсырмаларды ұсына аламыз, мысалы $\sqrt[4]{97+56\sqrt{3}}+\sqrt[4]{97-56\sqrt{3}}=4$ [3].

Элективті курстың бұл бөлімінде сонымен қатар олимпиада тапсырмалары, мысалы: $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ [4]. Осы есепті шығару барысында сол және оң бөліктерді түрлендіру арқылы дәлелдейді, дәлелдеуде айнымалыларды ауыстыру әдісі де қолданылады.

Сабақтың барысында оқушыларға есептердің шарттарын таратуда оқушылардың интеллектуалдық деңгейлерін ескеру қажет. Оқушылар қажет болған жағдайда мұғалімнен кеңес ала алады. Сабақтың соңында барлық есепке талдау жасалады. Талдауды оқушылардың өздері жасағандары дұрыс. Бір есеп бірнеше әдіспен шығарылған болуы мүмкін. Мұндай жағдайда есепті шығарған әрбір оқушы өзінің шешімін көрсетеді.

8-9 сыныптарға арналған стандартты емес есептерді шығаруды оқытудың мақсаты әртүрлі деңгейдегі математикалық олипиадаларға оқушыларды дайындау болады. Ол накты білім беру мен тәрбиелеудің келесідей міндеттерін шешудің құралы болып табылды

1) Оқушылардың математикаға қызығушылығын дамыту;

2) Оқушылардың шығармашылық кабілеттері мен зертеушілік дағдыларындамыту;

3) Олимпиада кезінде оқушылардың өздерінің мүмкіндіктерін дұрыспайдалана білуі (шыдамдылык, жағдайды дұрыс бағалай білу, басты нәрсегекөңіл аудару, табылған шешімді дұрыс жаза білу және т.б.) [5].

Қорытынды:«Тепе-теңдікті дәлелдеуге арналған алгебралық есептер» элективті курс математикалық есептерді шығару кезінде алғы шарттарымен қоса қорытынларды , жалпы және дербес жағдайларын , берілгені мен ізделіндіні, ұқсастық пен қарсы қою фактілерін үйретеді.Бұл курсты косымша дайындық сабақтарында өттім. Оқушылар курстың барысында ойлау жүрісін нақтылап бөліп айтуды, ойларын ықшамды түрде жеткізуді қалыптастырды. Сонымен қатар ұлттық бірыңғай тестілеуге дайындаған оқушыларым осындай алгебралық тепе-теңдік есептерін жүйелі түрде шеше алады. Практикада өзінің айқын нәтижелерін береді.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Әбілқасымова А.Е. Математиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі: дидактикалық-әдістемелік негіздері.-Алматы:Мектеп, 2014.-224б.

2. Аммосова Н.В. Реализация преемственности в процессе обучения математике при переходе из начального в среднее звено общеобразоват. школы: учебное пособие.-Астрахань: Изд-во Астрахан. обл. ин-та усовершенствования учителей, 2005.- 78 с.

3.Зайкин М.И. Преобразвоание радикалов. Элективный курс по математике / М.И. Зайкин.- Арзамас: АГПИ, 2008.- 132 с.

4.Куланин Е.Д. 3000 конкурсных задач по математике / Е.Д. Куланин, В.П. Норин.- 5-е изд.-М.: Айрис-пресс, 2003.- 624 с.

5. Агаханов Н.Х.,ПодлипскийО. Математические олимпиады Московской области: 1993-2002. - М.: Изд-во МФТИ,2003. - 224с.

УДК 517.2

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІ МЕКТЕПТЕ ОҚЫТУ

Назарбек Мәдина

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

madinanazarbek@mail.ru
Ғылыми жетекшісі - ф.-м.ғ.к., доцент Тілеулесова Ағила Балтабайқызы

Аннотация. Математиканы табиғат құпияларына ену әдісі ретінде қабылдай отырып, бұл әдісті қолданудың негізгі әдісі нақты әлемнің математикалық модельдерін қалыптастыру және зерттеу деп айтуға болады. Кез-келген физикалық құбылыстарды зерттей отырып, зерттеуші, ең алдымен, оның математикалық моделін (идеализацияланған формасы) жасайды, яғни құбылыстың қайталама сипаттамаларын елемей, ол осы құбылысты басқаратын негізгі заңдылықтарды математикалық түрде жазады. Көбінесе бұл заңдылықтарды дифференциалдық теңдеулер түрінде беруге болады.

Дифференциалдық теңдеулер әртүрлі есептерді, әсіресе соның ішіндеоңтайландыру есептерін шешуге мүмкіндік береді. Ал, мектептегі математика курсында арнайы физика-математикалық сыныптарда дифференциалдық теңдеулер жалпы түрде оқыту енгізілді. Дифференциалдық теңдеулер теориясы пайда болғаннан бері физика, механика және технологияның математикалық есептерімен тығыз байланыста дамыды. Математикалық білімнің мазмұнына дифференциалдық теңдеулер туралы ақпаратты енгізу оқушылардың ғылыми дүниетанымын қалыптастыруда, математиканы оқытудың қолданбалы бағытында, бүкіл ғылым жүйесінің құрылымын және таным мен практикадағы ғылыми әдістің рөлін түсінуге ықпал ететін пәнаралық байланыстарды жүзеге асыруда үлкен рөл атқарады[1].

"Дифференциалдық теңдеулер" тақырыбын зерттеу теңдеулер туралы ұғымды кеңейтеді. Оқушылар дифференциалдық және бұрын зерттелген теңдеулердің (алгебралық және трансценденттік) ортақтығын түсінуі үшін осы тақырыптарды ұсынуда сабақтастықты сақтаған жөн. Дифференциалдық теңдеулер мектептегі теңдеулерді құрастырудың соңғы кезеңі болып табылады. Өкінішке орай, бұл теңдеулер бөлімі алгебра бойынша барлық оқу материалдарында, тіпті арнайы физика-математикалық сыныптарда жоқ. Сонымен, оның маңызы қандай? Бейіндік сыныптарда оқыту процесінде жаратылыстану бейінді мұғалімдеріне оқушыларға теориялық материалды меңгертуде қиындықтарға тап болады. Оның бір себебі – математика курсында теңдеулер курсын толық меңгермеу. Осылайша, орта арнаулы және жоғары оқу орындарындағы мектепте алгебраның әдістемелік құралы арасындағы сабақтастық бұзылады. Сонымен қатар, дифференциалдық теңдеулер туралы ең болмағанда қарапайым тұжырымдамалық білімнің болмауы, олардың қарапайым түрлерін шешу физика, химия және экономикадағы теориялық және практикалық материалдардың дамуына кедергі келтіреді. Қарапайым мысалды қарастырайық. Бірінші жартыжылдықта физика-математика бейініндегі 10 сынып оқушылары (басқа пәндердегідей базалық, әлеуметтік-гуманитарлық және химия-биологиялық) физиканың "Механика"бөлімін оқи бастайды. Бұл бөлімде "лездік" ұғымы ерекше рөл атқарады: лездік жылдамдық, лездік үдеу. Бұл координатаның өзгеру жылдамдығын немесе нөлге ұмтылатын уақыт кезеңіндегі координатаның өзгеру жылдамдығының өзгеру жылдамдығын сипаттайтын шамалар. Бұл ұғымдардың мәнін шексіз азаятын доғаны қатайтатын шексіз азаятын аккорд мысалында қарапайым түрде түсіндіруге болады.. Дифференциалдық теңдеулер үлкен қолданбалы мәнге ие, жаратылыстану және технология есептерін зерттеудің қуатты құралы бола отырып, олар механика, астрономия, физика, химия, биологияның көптеген есептерінде кеңінен қолданылады. Бұл көбінесе белгілі бір құбылыстар (процестер) бағынатын объективті заңдар дифференциалдық теңдеулер түрінде жазылатындығына байланысты және бұл теңдеулердің өзі осы заңдылықтарды сандық түрде білдірудің құралы болып табылады. Мысалы, Ньютон механикасының заңдары материалдық нүктелер жүйесінің немесе қатты дененің қозғалысын сипаттаудың механикалық есебін дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін табудың математикалық есебіне азайтуға мүмкіндік береді[2].Жаратылыстанудың көптеген есептерінің математикалық моделі дифференциалдық теңдеулермен беріледі. Сондықтан, дифференциалдық теңдеулер білім алушының математикалық қабілеттерін дамытумен қатар, олардың ғылыми дүниетанымын қалыптастырады, олардың кәсіби дайындығының деңгейін көтереді, ғылым жүйесіндегі математиканың орнын анықтауға көмектеседі.

Мектеп математикасында дифференциалдық теңдеулер тақырыбын төмендегі мысалдарды беруден бастап, оның басқа пәндермен байланысын білім алушыға ұғындырамыз.

Мысал 1. Массасы m материалдық нүктеге тұрақты күш әсер етіп, нүктеге a үдеуін береді.Қоршаған орта қозғалыстағы нүктеге оның қозғалысына пропорционал жылдамдықты,кедергіні береді,пропорционалдық коэффициенті γ–ға тең. Егер нүкте бастапқы кезде тыныштықта болған болса,уақыт өте оның қозғалыс жылдамдығы қалай өзгереді?

Шешуі. Қозғалыс басталған сәттен бастап уақытты есептейміз. $v(t)$ арқылы нүктенің t уақыт аралығындағы қозғалыс жыдлдамдығын белгілейік. Онда $v(0)=0$.Кез-келген t уақытта нүктеге $ma-\gamma v(t)$ күш әсер етеді. Ньютонның екінші заңына сәйкес бұл күш нүктеге $\frac{ma-\gamma v(t)}{m}$ тең болатын үдеу береді. t уақыттағы үдеу - осы уақыттағы жылдамдықтың өзгеру шапшаңдығы,яғни уақыт функциясы ретінде жылдамдықтың туындысы.Сондықтан $\frac{dv}{dt}=\frac{ma-\gamma v(t)}{m}$.Бұл теңдеуді былай жазамыз:

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{\gamma}{m}v+a$$

Шешімнің бірі $v(t)=\frac{m}{\gamma}v+a$ тұрақты функциясы болады.Бұл теңдеудің оң жағын нөлге айналдырады,ал тұрақты функцияның туындысы да нөлге тең,сондықтан алынған теңдеудің барлық шешімдері келесідей анықталады:

$$v(t)=\frac{m}{\gamma}a+Ce^{-\frac{\gamma}{m}t}. \qquad (1)$$

$v(0)=0$ шартын қанағаттандыратын шешімді таңдаймыз. (1)-ге $t=0$ қойып, $0=\frac{m}{\gamma}a+C$ аламыз,осы жерден $C=-\frac{m}{\gamma}a$ болады.Материалдық нүктенің қозғалыс жылдамдығы уақыт өткен сайын $\frac{m}{\gamma}a$ мәніне жақындай отырып, артады.Қозғалыс басталғаннан кейін біршама уақыттан соң нүкте $\frac{m}{\gamma}a$–ға жақын бірқелкі жылдамдықпен қозғалады.

Мысал 2. Материалдық нүкте жүріп өткен арақашықтыққа кері пропорционал жылдамдықпен түзу сызық бойымен қозғалады. Қозғалыстың бастапқы сәтінде нүкте жолдың басынан 5 м қашықтықта болды және $v_0=20$ м/с жылдамдыққа ие еді. Жүріп өткен жолды және қозғалыс басталғаннан соң 10 с кейінгі нүктенің жылдамдығын анықтаңыз.

Шешуі. $s=s(t)$ арқылы нүктенің t моменттегі басынан бергі қашықтығын белгілейміз. Онда $s(0)=5$. Шартқа сәйкес s ұзындықтың t уақыт бойынша өзгеруі $\frac{ds}{dt}=\frac{k}{s}$ дифференциалдық теңдеуімен анықталады,мұндағы k - проорционалдық коэффициенті.

Осы теңдеудегі айнымалыларды ажыратып және оларды интегралдап, алатынымыз: $s^2=2(kt+C), s=\sqrt{2(kt+C)}$.

$s(0)=5$ шартынан интегралдау тұрақтысын анықтаймыз $C:5=\sqrt{2C}, C=\frac{25}{2}$ сондықтан $s=\sqrt{25+2kt}$ t бойынша интегралдаса, t моменттегі нүктенің қозғалыс жылдамдығын табамыз: $v(t)=\frac{ds}{dt}=\frac{k}{\sqrt{25+2kt}}$.

$v(0)=v_0=20$ м/с шартынан пропорционалдық коэффициентін табамыз: $k:v(0)=\frac{k}{5}=20м/с, k=100$ Осылайша, $s(t)$ арақашықтық және $v(t)$ жылдамдық уақыт өткен сайын $s(t)=\sqrt{25+200t}, v(t)=\frac{100}{\sqrt{25+200t}}$ заңымен өзгереді.

Қозғалыс басталғаннан кейін 10 с соң алатынымыз: $s(10)=\sqrt{25+200\cdot 10}=45$ м,

$v(10)=\frac{100}{\sqrt{25+200\cdot 10}}=\frac{100}{45}=\frac{20}{9}м/с$.

Демек,қозғалыс басталғаннан кейін соң нүктенің жылдамдығы $\frac{20}{9}$ м/с,осы уақыт аралығында жүріп өткен арақашықтығы $s(10)-s(0)=45-5=40м$.

Мысал 3. Қайықтың жылдамдығына пропорционал су кедергісінің әсерінен қайық қозғалысын баяулатады.Қайықтың бастапқы жылдамдығы 2 м/с,ал 4 с өткеннен кейінгі жылдамдығы 1м/с. Қанша секундтан соң қайықтың жылдамдығы 0,25 м/с болады? Аялдамаға дейін қайық қандай жолдан өтуі мүмкін?

Шешуі. $v=v(t)-t$ уақыттағы қайықтың жылдамдығы болсын.Онда $v(0)=2$. Ньютонның екінші заңы бойынша, $m\frac{dv}{dt}=F(t), F(t)$- қайыққа әсер етуші күш,ал $m-$ қайықтың салмағы. Шарт бойынша $F(t)=-kv(t), k>0$ пропорционалдық коэффициенті,ал минус таңбасы күштің қозғалыс бағытына қарсы бағытталғанын білдіреді. Сондықтан қайық қозғалысының дифференциалдық теңдеуі бар: $m\frac{dv}{dt}=-kv.$ Оның шешуі $v=Ce^{-\frac{kt}{m}}$. Шартқа сәйкес $v(0)=2$, сондықтан $C=2$ және $v=2e^{-\frac{kt}{m}}$. $v(4)=1$ болғандағы - $\frac{k}{m}$ ұзындығын анықтауға болады: $1=2e^{-\frac{k4}{m}}, \frac{k}{m}=\frac{ln2}{4}$.

Қайықтың жылдамдығы $v(t)=2^{1-\frac{t}{4}}$. Қайықтың жылдамдығы 0,25м/с - тең болатын Т уақытты $0,25=2^{1-\frac{T}{4}}$ теңдеуінен табамыз, осы жерде $2^{-2}=2^{1-\frac{T}{4}}, T=12c$. Қайық өткен жолдың ұзындығын келесі формула бойынша есептейміз:

$$s(t)=\int_0^x v(x)dx=\int_0^t 2^{1-\frac{x}{4}}dx=\frac{8}{ln2}\left(1-2^{-\frac{t}{4}}\right).$$

Осыдан қайықтың өткен жолы $\frac{8}{ln2}$ □ $11,5м$ –ден көп болмайтыны көрініп тұр.

Мысал 4. Локомотивтің үдеуі,бастапқы жылдамдығы v_0 тең, F тарту күшіне тура пропорционал және поездың m массасына кері пропорционал.Локомотивтің тару күші $F(t)=b-kv(t)$, $v(t)$ локомотивтің t уақыттағы жылдамдығы, a, b, k –тұрақты шамалар.Локомотивтің тарту күшінің уақытқа тәуелділігін анықтаңыз.

Шешуі. Локоматив үдеуінің жылдамдықтан туындысы бар: $a=\frac{dv}{dt}$. Сондықтан шартқа сәйкес, $\frac{dv}{dt}=\frac{b-kv}{m}$.Бұл теңдеуді интегралдап, $v(t)=\frac{b}{k}+Ce^{-\frac{kt}{m}}$ аламыз.

Локомативтің бастапқы жылдамдығы$v(0)=v_0$, сондықтан $v(0)=v_0=\frac{b}{k}+C, C=v_0-\frac{b}{k}$. Осылайша, $v(t)=\frac{b}{k}-\left(v_0-\frac{b}{k}\right)e^{-\frac{kt}{m}}$ және локомативтің тарту күшінің уақытқа тәуелділігі $F(t)=b-kv(t)=(b-kv_0)e^{\frac{-kt}{m}}$ теңдеуімен анықталады.

Мысал 5. Парашютші радиусы $R=4\,м$ жарты шар түрінде парашютпен түседі.Оның массасы парашют массасымен бірге 82 кг. Парашютшінің түсу басталғаннан 2с кейінгі жылдамдығы мен t уақытта өткен жолын табыңыз.Ауаның кедергі күші $F_1=0,00081sv^2, s-$қозғалыс бағытына перпендикуляр ең үлкен көлденең қиманың ауданы.

Шешуі. Дифференциалдық теңдеуде парашюттің қозғалысы $m\frac{dv}{dt}=F$ бір-біріне қарама-қарсы бағытталған mg –тең салмаққа және $0,00081sv^2$ –тең ауаның кедергі күшіне бірдей әсер ететін F күш болады. Сондықтан қозғалыстың $m\frac{dv}{dt}=mg-0,00081sv^2$ дифференциалдық теңдеуі бар.Бұл теңдеуді мынадай түрде жазамыз:

$$\frac{dv}{dt}=g-\alpha v^2, \alpha=\frac{0,00081s}{m}.$$

Айнымалыларын ажыратып,интегралдасақ:

$$\int\frac{dv}{g-\alpha v^2}=t+C, \quad \frac{1}{g-\alpha v^2}=\frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\frac{1}{\sqrt{g}+v\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{g}-v\sqrt{\alpha}}\right),$$

$$\int\frac{dv}{g-\alpha v^2}=\frac{1}{2\sqrt{g\alpha}}\ln\left(\sqrt{g}+v\sqrt{\alpha}\right)-\frac{1}{2\sqrt{ga}}ln\left(\sqrt{g}-v\sqrt{\alpha}\right)=\frac{1}{2\sqrt{ga}}ln\frac{\sqrt{g}+v\sqrt{\alpha}}{\sqrt{g}-v\sqrt{\alpha}}=t+C$$

$$t=0, v=0, C=0, t=\frac{1}{2\sqrt{g\alpha}}ln\frac{\sqrt{g}+v\sqrt{\alpha}}{\sqrt{g}-v\sqrt{\alpha}}$$

$$v=\sqrt{\frac{g}{\alpha}}\frac{e^{\sqrt{g\alpha}t}-e^{-\sqrt{g\alpha}t}}{e^{\sqrt{g\alpha}t}+e^{-\sqrt{g\alpha}t}}=\sqrt{\frac{g}{\alpha}}\frac{sh\left(\sqrt{g\alpha}t\right)}{ch\left(\sqrt{g\alpha}t\right)}$$

v-ны $\frac{ds}{dt}$ - меналмастырып,келесі теңдікке ие боламыз: $\frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{g}{\alpha}}\frac{sh\left(\sqrt{g\alpha}t\right)}{ch\left(\sqrt{g\alpha}t\right)}$.

Интегралдасақ, $s=\frac{1}{\alpha}lnch\left(\sqrt{g\alpha}t+C\right)$.Осыжерде $t=0, s=0$ бастапқы шарт бойынша $C=0$ және нәтижесінде табатынымыз:

$$s=\frac{1}{\alpha}\ln ch\left(\sqrt{g\alpha}t\right) \, (3)$$

(2) және (3) формулалары парашютшінің жылдамдығының өзгеруін және t уақыт аралығында жүрген жолын көрсетеді.

Қозғалыс басталғаннан кейін 2 с кейінгі жылдамдықты есептейміз:

$$g \approx 981, \alpha=\frac{0,00081s}{m}=\frac{0,00081\pi 160000}{82000} \approx 0,005,$$

$$\sqrt{\frac{g}{\alpha}} \approx 943, \sqrt{g\alpha} \approx 2,21.$$

Сәйкес келетін жылдамдық $v_1 = v(2) = 443\frac{e^{8,81}-1}{e^{8,81}+1} \approx 4,43\frac{м}{с}$,

(2) теңдік бойынша анықталатын жылдамдық шектік мәнге ие $v_n = \lim_{t\to\infty} v(t)$.Теориялық жағынан жету мүмкін емес болған шектік жылдамдыққа практикада қозғалыс басталғаннан кейін 2 секундтан соң ие болады. (3) формула парашюттың қозғалысынкөрсетеді.Бұл формуланы келесі түрде жазамыз:

$$s = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{e^{\sqrt{g\alpha}t} - e^{-\sqrt{g\alpha}t}}{2}.$$

Алымының екінші мүшесі тіпті t-нің кіші мәндері үшін де өте аз болады, сондықтан белгілі бір мәннен үлкен барлық t үшін,практикалық қателерсіз

$$s = \frac{1}{\alpha}ln\frac{e^{\sqrt{g\alpha}t}}{2} = \sqrt{\frac{g}{\alpha}}t - \frac{ln2}{\alpha}$$

деп қабылдауға болады.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Кудрявцев Л.Д. Мысли о современной математике и ее изучении. - М: Наука, 1977. - С. 112.
2. Аносов Д.В. Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем. - М.: МЦНМО, 2008. - 200 с.
3. Ястребова Г. Е. о методических особенностях изучения дифференциальных уравнений средней школы//Научние труды МШ'У им. в. Я. Ленина. Серия:естественные науки. - "Прометей", 1995. -С. 192-194.
4. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями: учеб.пособие. –Изд. 6-е. –М.: Изд-во ЛКИ, 2017. –256 с.

ӘОЖ 371

ОҚУШЫЛАРДЫҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ БІЛІМІН АРТТЫРУДА АҚПАРАТТЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАРДЫ ҚОЛДАНУ

Оңдасын Айханым Азаматқызы

aiganim_0709@mail.ru

Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ Алгебра және геометрия кафедрасының магистранты,

Нұр-Сұлтан қаласы, Қазақстан

Ғылыми жетекшісі – Дуйсенгалиева Б.А.

Галилео Галилей: «*Әлем – математика тілімен бейнеленген*», - деп айтқандай қазіргітаңда әлемді математикасыз елестету мүмкін емес. Адамзат тарихында математика – мәдениеттің ажырамас бөлігі, қоршаған әлемді түсінудің кілті және ғылыми-техникалық прогрестің негізі. Сондықтан ең маңызды әрі меңгерілуі міндетті пәндердің бірі болып математика пәні саналады [1].

Математикалық білім – бұл гуманитарлық білімнің ажырамас бөлігі әрі жеке тұлғаны қалыптастырудың маңызды элементі болып саналады. Бүгінгі таңда адам қызметінің бірде- бір саласын математикасыз елестету мүмкін емес. Алайда соңғы уақыттағы алынған сұхбаттар мен сауалнамалар нәтижесі бойынша мектеп оқушылары үшін қиын әрі ұнамсыз пән ретінде математиканы атап көрсеткенін байқасақ болады. Осы