ӘОЖ 517.18

МЕКТЕП МАТЕМАТИКА КУРСЫНДАҒЫ ФУНКЦИОНАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҰҒЫМЫ

Серикбек Бергенжан

bergen_jan.99@mail.ru

Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ, механика-математика факультеті, алгебра және геометрия кафедрасы

Ғылыми жетекшісі: ф.- м.ғ.к., доцент Тілеулесова Ағила Балтабайқызы

Аннотация.Бүгінгі таңда ғылым мен техниканы дамыту сапалы білім беру жүйесін енгізу мен еңбек нарығының қажеттіліктерін ескере отырып, білікті кадрлар даярлау жалпы білім беретін мектептер үшін басымдық болып табылады. Бұл мақалада мектеп бағдарламасындағы функционалдық теңдеулер ұғымы мен оның тарихына көз жүгіртіп, кейбір есептерді қарастырамыз.

Кілт сөздер: функция, функционалдық теңдеу, функционалдық теңдеуді шешу.

Жоғары сынып оқушылары меңгеруі тиіс маңызды математикалық дағдылардың бірі – теңдеулерді шеше білу. Теңдеудің түбірі бір немесе одан да көп амалдардан соң табылады, көптеген мәтіндік есептер алгебралық жолмен шығарылады. Яғни, теңдеулердің өзі есептерді шешудің тапсырмалары мен әдістері болып табылады. Ал оларды шешу қабілеті мектептің барлық оқушыларына қажет.

Соңғы уақытта еліміздің жетекші жоғары оқу орындарына оқуға түсу кезіндегі тесттерде, оқушылардың әртүрлі олимпиадалар тапсырмаларында кездесетін, сондай-ақ қиын деңгейдегі есептер қатарында жүретін теңдеулердің бірі – функционалдық теңдеулер. Функционалдық теңдеу – бір немесе бірнеше белгісіз функцияларды қамтитын теңдеу. $f(x)$ функциясы берілген функционалдық теңдеудің шешімі деп аталады, егер ол оны анықтау облысындағы аргументтің барлық мәндері үшін қанағаттандырса. Функционалдық теңдеуді шешу дегеніміз – оны бірдей қанағаттандыратын барлық функцияларды табу. Кейбір функционалдық теңдеулер бізге мектеп курсынан таныс. Бұл функцияның тақтылық, жұптылық, периодтылық секілді қасиеттерін анықтайтын

$f(x)=f(-x)$, $f(-x)=-f(x)$, $f(x+T)=f(x)$ теңдеулері.

Функционалдық теңдеулерді шешу мәселесі математикалық анализдегі ең көне есептердің бірі болып табылады. Олар функциялар теориясының басталуымен бір мезгілде дерлік пайда болды. 1769 жылы Даламбер күш қосу заңының негіздемесін мына функционалдық теңдеуді шешуге келтірді:

$$f(x+y)+f(x-y)=2\cdot f(x)\cdot f(y) \qquad (1)$$

Осы теңдеуді Пуассон 1804 жылы аналитикалық болжаммен қарастырды, ал 1821 жылы Коши(1789 – 1857) тек f(x) үзіліссіздігін ескере отырып, осы теңдеудің жалпы шешімдерін тапты:

$$f(x)=\cos ax$$

$$f(x)=chax=\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}$$

$$f(x) \equiv 0.$$

Тіпті, белгілі евклидтік емес геометрия формуласы параллелизм бұрышы үшін келесі түрдегі формуланы

$$f(x) = tg\frac{1}{2}\prod(x) = e^{-\frac{x}{k}}$$

Н. И.Лобачевский Коши әдісіне ұқсас әдіспен шешіп, (1792 – 1856) келесі түрдегіфункционалдық теңдеуден алды:

$$f^2(x) = f(x-y)\cdot f(x+y) \qquad (2)$$

Бұл теңдеуді мына теңдеуге келтіруге болады:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Шешімі: $f(x) = ac^x$

Функционалдық теңдеулерге әкелетін бірқатар геометриялық есептерді ағылшын математигі Ч.Баббедж да (1792-1871) қарастырды. Ол, мысалы, қисықтағы кез келген нүктелер жұбы үшін келесі қасиетпен анықталатын екінші ретті периодты қисықтарды зерттеді: егер екінші нүктенің абсциссасы біріншінің ординатасына тең болса, онда екінші нүктенің ординатасы біріншісінің абциссасына тең болады. Мұндай қисық $y = f(x)$ функциясының графигі болсын; $(x, f(x))$- оның еркін нүктесі. Сонда шарт бойынша абсциссасы $f(x)$ бар нүкте x ординатасына ие болады. Демек,

$$f(f(x)) = x \qquad (3)$$

(3) функционалдық теңдеуі, атап айтқанда, мына функцияларды қанағаттандырады:

$$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2},\ x \in \left[0;|a|\right],$$

$$f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0$$

Ең қарапайым функционалдық теңдеулердің бірі – Коши теңдеулері болып табылады.

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (4)$$

$$f(x+y) = f(x)\cdot f(y) \qquad (5)$$

$$f(xy) = f(x) + f(y) \qquad (6)$$

$$f(xy) = f(x)\cdot f(y) \qquad (7)$$

Коши бұл теңдеулерді 1821 жылы жарық көрген өзінің (анализ курсында) егжей-тегжейлі зерттеді. Осы төрт негізгі теңдеулердің үзіліссіз шешімдері сәйкесінше келесі түрде болады:

$$f(x) = ax; ax; \log_a x; x^a (x > 0)$$

Үзіліссіз функциялар класында басқа шешімдер болуы мүмкін. (4) теңдеуді бұрын Лежандр мен Гаусс проекциялық геометрияның іргелі теоремасын шығару кезінде және Гаусс ықтималдығының таралу заңын зерттеу кезінде қарастырған[1].

(4) функционалдық теңдеуді Г.Дарбу күштер параллелограмы мәселесіне және проекциялық геометрияның негізгі теоремасына қолданды. Оның басты жетістігі – болжамдардың айтарлықтай әлсіреуі. (4) Коши функционалдық теңдеуі үзіліссіз функциялар класындағы $f(x) = ax$ сызықты біртекті функцияны сипаттайтынын білеміз. Дарбу кем дегенде бір нүктеде үзіліссіз немесе еркін түрде аз аралықта жоғарыдан (немесе төменнен) шенелген кез келген шешімнің де $f(x) = ax$ әлсірету бойынша одан әрі нәтижелер тез жүреді (интегралдылық, оң шама жиыны бойынша өлшемділік). Осы кезде мынадай сұрақ туындайды: сызықтық біртекті функциядан ерекшеленетін кем дегенде бір аддитивті функция бар ма? (яғни, (4) Коши функционалдық теңдеуін қанағаттандыратын). Мұндай функцияны табу оңай емес! (4) функционалдық теңдеуінің $f(x) = ax$-тен ерекшеленетін үзіліссіз шешімінің алғашқы мысалын

1905 жылы неміс математигі Г.Гамель өзі енгізген нақты сандар негізін пайдаланып құрастырған.

Көптеген функционалдық теңдеулер нақты функцияны анықтамайды, бірақ функциялардың кең класын береді, яғни олар функциялардың сол немесе басқа класын сипаттайтын қасиетті білдіреді. Мысалы, $f(x+1)=f(x)$ функционалдық теңдеуі 1 периоды бар функциялар класын, ал $f(1+x)=f(1-x)$ теңдеуі $x=1$ түзу сызығын және т.б. қатысты симметриялы функциялар класын сипаттайды[2].

Ірі математиктер, олардың ішінде Эйлер, Гаусс, Коши, Даламбер, Абель, Лобачевский, Дарбу, Гильберт бірнеше рет функционалдық теңдеулерді қарастырды және оларды шешу әдістерін жасауға көп көңіл бөлді. "Функционалдық теңдеуді шешу" ұғымы белгісіз функцияны табу деп түсініледі, белгісіз функцияны бастапқы функционалдық теңдеуге ауыстырған кезде ол сәйкестікке айналады (егер бірнеше белгісіз функциялар болса, олардың барлығын табу керек).

Бродский Я.С., Слипенко А.К. «Функциональные уравнения» [3] кітабында функционалдық теңдеулерді шешудің қарапайым әдістері, яғни белгілі бір қатынастарды қанағаттандыратын белгісіз функцияны табу қажет теңдеулер келтірілген. Бұл теңдеулерді шешуде алгебра мен математикалық анализдің топ, матрица, үзіліссіздік, дифференциалдау және т. б. сияқты маңызды түсініктері қолданылады.

Андреев А.А., Кузьмин Ю.Н., Савин А. Н. «Функциональные уравнения» [4] кітапшасының мақсаты – оқырманды функционалды теңдеулерді шешудің кейбір әдістерімен таныстыру. Кітап жоғары сынып оқушыларына арналған, сонымен қатар мектеп математика үйірмесінің жұмысына баға жетпес көмек көрсетеді.

Сәбитов Қ.Б жазған «Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения» [5] нұсқаулық-кітабында функционалдық, қарапайым дифференциалдық, интегралдық теңдеулер, сонымен қатар дербес туындылардағы дифференциалдық теңдеулер және оларды шешудің классикалық әдістері көрсетілген. Функционалдық теңдеулер негізінде негізгі элементар функциялардың анықтамалары берілген. Әртүрлі функционалдық теңдеулердің көптеген мысалдары келтірілген, олардың арасында оқушылар мен студенттерге арналған математикалық олимпиадаларда ұсынылған теңдеулер бар.

Лихтарников Л.М. «Элементарное введение в функциональные уравнения» [6] кітабы орта мектептердің математикалық сынып оқушыларына, математика факультеттерінің студенттеріне және математика мұғалімдеріне арналған. Оны "Математикалық талдау" курсын оқу процесінде, "Қарапайым функционалдық теңдеулерге кіріспе" факультативті курсын өткізу үшін, шығармашылық жұмысқа тарту үшін қабілетті студенттермен және кіші курс студенттерімен жеке жұмыс жасау кезінде қолдануға болады.

Ең қарапайым функционалдық теңдеулерді шешу әртүрлі функциялардың қарапайым қасиеттерін қолдануға негізделген. Осындай функционалдық теңдеулерді шешуге арналған есептер қарастырайық.

Есеп 1 $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ жиынында анықталған $(x-1)\cdot f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-f(x)=\pi$ қатынасынқанағаттандыратын барлық функцияны табыңыз.

Шешуі: $x-$ ке $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ мәнін берейік. Онда келесі теңдікті аламыз:

$$\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)\cdot f\left(\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}\right)-f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{x+1}{x-1}$$

Бұдан шығатыны:

$$\frac{2}{x-1}\cdot f(x)-f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{x+1}{x-1}.$$

Және келесі жүйені аламыз:

$$\begin{cases} (x-1)\cdot f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)-f(x)=x, & (1) \\ \dfrac{2}{x-1}\cdot f(x)-f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\dfrac{x+1}{x-1}. & (2) \end{cases}$$

(1)-ші теңдеуден $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ өрнектейміз және (2)-ші теңдеуге қоямыз:

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{f(x)+x}{x-1};\ \frac{2}{x-1}\cdot f(x)-f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{x+1}{x-1};$$

Осыдан

$$f(x)\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{x}{x-1}+\frac{x+1}{x-1};\ f(x)\cdot\frac{1}{x-1}=\frac{2x+1}{x-1};\ f(x)=2x+1.$$

Енді $f(x)$ функциясының шынымен теңдеуді қанағаттандыратынын тексерейік:

$$(x-1)\cdot\left(2\cdot\frac{x+1}{x-1}+1\right)-2x-1=\pi$$

$$2x+2+x-1-2x-1=x$$

$x=x$-дұрыс, яғни теңдеуді қанағаттандыратынын көрдік.

Жауабы: $f(x)=2x+1$

Есеп 2 $f(x)+2\cdot f(1/x)=\dfrac{3-x^2}{x}$ функционалдық теңдеуінің шешімін табыңыз.

Шешуі:

1) $x-$ ті $\dfrac{1}{x}-$ге алмастырамыз. Онда,

$$f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} \text{ немесе } f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3x^2-1}{x} \text{ аламыз.}$$

2) 1) -дегі теңдеудің екі бөлігін де (-2)-ге көбейтіп, бастапқы мына теңдеулерге қосамыз:

$$-2\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)-4f(x)=\frac{-6x^2+2}{x}$$

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{3-x^2}{x}$$

Бұдан,

$$-3f(x)=\frac{-6x^2+2+3-x^2}{x}$$

$$f(x)=\frac{-7x^2+5}{-3x}$$

Жауабы: $f(x)=\dfrac{-7x^2+5}{-3x}$

Қазіргі уақытта білім беру процесінің бірінші сатысы ретінде мектеп біліміне көп көңіл бөлінеді. Оның маңызды міндеттерінің бірі – оқушыларға терең білім беру, сонымен қатар оларды практика жүзінде ұтымды қолдана білу. Қорытындылай келе, функционалдық теңдеулер көптеген есептерді зерттеуде маңызды рөл атқаратынын атап өткен жөн. Олар геометрияда, механикада, астрономияда, физикада кеңінен қолданылады. Бұл көбінесе белгілі бір құбылыстар (процестер) бағынатын объективті заңдар қарастырылатын теңдеулер түрінде жазылатындығына байланысты. Функцияларды зерттеу және оларды шеше білу мектеп курсының маңызды бөлімі болып табылады. Графиктік техниканы еркін меңгеру көбінесе күрделі есептерді шешуге көмектеседі, кейде оларды шешудің жалғыз құралы болып табылады. Сонымен қатар, функциялардың графигін құру оқушылардың өздері үшін үлкен қызығушылық тудыратыны сөзсіз.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах: том 1. – М.: Наука, 1968, с. 157 – 162
2. Ильин В.А. Методы решения функциональных уравнений // Соросовский образовательный журнал, 2001, № 2, с. 116 – 120
3. Бродский Я. С., Слипенко А. К. Функциональные уравнения. – К.: Вища школа. Головное издательство, 1983. – 96 с.
4. Андреев А.А., Кузьмин Ю.Н.., Савин А.Н., Саушкин И.Н. Функциональные уравнения. – Самара: В мире науки, 1999
5. Сабитов К.Б. Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения.−М.:’’Высшая школа’’,2005,с.190−199
6. Лихтарников Л.М. Элементарное введение в функциональные уравнения.– СПб.: Лань, 1997. – 160 с.