

ISSN 2616-6836

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

# ХАБАРШЫСЫ

---

---

**ВЕСТНИК**

Евразийского национального  
университета имени Л.Н. Гумилева

**BULLETIN**

of the L.N. Gumilyov Eurasian  
National University

**ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ** сериясы

Серия **ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ**

**PHYSICS. ASTRONOMY** Series

№1(122)/2018

1995 жылдан бастап шығады

Издается с 1995 года

Founded in 1995

Жылына 4 рет шығады

Выходит 4 раза в год

Published 4 times a year

Астана, 2018

Astana, 2018

*Бас редакторы*  
ф.-м.ғ. докторы  
**А.Қ. Арынгазин** (Қазақстан)

*Бас редактордың орынбасары*

**А.Т. Ақылбеков**, ф.-м.ғ.д., профессор  
(Қазақстан)

*Редакция алқасы*

<b>Алдонгаров А.А.</b>	PhD (Қазақстан)
<b>Балапанов М.Х.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
<b>Бахтизин Р.З.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
<b>Гиниятова Ш.Г.</b>	ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)
<b>Даулетбекова А.Қ.</b>	ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)
<b>Ержанов Қ.К.</b>	ф.-м.ғ.к., PhD (Қазақстан)
<b>Жұмаділов Қ.Ш.</b>	PhD (Қазақстан)
<b>Здоровец М.</b>	ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)
<b>Қадыржанов Қ.К.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
<b>Кайнарбай А.Ж.</b>	ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)
<b>Кутербеков Қ.А.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
<b>Лущик А.Ч.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Эстония)
<b>Морзабаев А.К.</b>	ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)
<b>Мырзақұлов Р.Қ.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
<b>Нұрахметов Т.Н.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
<b>Сауытбеков С.С.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
<b>Тлеукенов С.К.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
<b>Усеинов А.Б.</b>	PhD (Қазақстан)

*Редакцияның мекенжайы:* 010008, Қазақстан, Астана қ., Сатпаев к-сі, 2, 408 б.  
Тел.: (7172) 709-500 (ішкі 31-428)  
E-mail: vest\_phys@enu.kz

*Жауапты хатшы, компьютерде беттеген*  
А. Нұрболат

**Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ сериясы**

Меншіктенуші: ҚР БжҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК  
Мерзімділігі: жылына 4 рет.

Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігімен тіркелген.  
27.03.2018ж. №16999-ж тіркеу куәлігі. Тиражы: 30 дана

Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Қажымұқан к-сі, 12/1,  
тел.: (7172)709-500 (ішкі 31-428)

*Главный редактор*  
доктор ф.-м.н.  
**А.К. Арынгазин** (Казахстан)

*Зам. главного редактора*

**А.Т. Акылбеков**, доктор ф.-м.н.  
профессор (Казахстан)

*Редакционная коллегия*

<b>Алдонгаров А.А.</b>	PhD (Казахстан)
<b>Балапанов М.Х.</b>	ф.-м.н., проф. (Россия)
<b>Бахтизин Р.З.</b>	ф.-м.н., проф. (Россия)
<b>Гиниятова Ш.Г.</b>	кандидат ф.-м.н. (Казахстан)
<b>Даулетбекова А.К.</b>	кандидат ф.-м.н., PhD (Казахстан)
<b>Ержанов К.К.</b>	кандидат ф.-м.н., PhD (Казахстан)
<b>Жумадилов К.Ш.</b>	доктор PhD (Казахстан)
<b>Здоровец М.</b>	к.ф.-м.н. (Казахстан)
<b>Кадыржанов К.К.</b>	ф.-м.н., проф. (Казахстан)
<b>Кайнарбай А.Ж.</b>	кандидат ф.-м.н. (Казахстан)
<b>Кутербеков К.А.</b>	доктор ф.-м.н., проф. (Казахстан)
<b>Лущик А.Ч.</b>	ф.-м.н., проф. (Эстония)
<b>Морзабаев А.К.</b>	кандидат ф.-м.н. (Казахстан)
<b>Мырзакулов Р.К.</b>	доктор ф.-м.н., проф. (Казахстан)
<b>Нурахметов Т.Н.</b>	доктор ф.-м.н., проф. (Казахстан)
<b>Сауытбеков С.С.</b>	доктор ф.-м.н., проф. (Казахстан)
<b>Тлеукенов С.К.</b>	доктор ф.-м.н., проф. (Казахстан)
<b>Усеинов А.Б.</b>	PhD (Казахстан)

*Адрес редакции:* 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, каб. 408  
Тел.: (7172) 709-500 (вн. 31-428)  
E-mail: vest\_phys@enu.kz

*Ответственный секретарь, компьютерная верстка*  
А. Нурболат

**Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия.**  
**ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ**

Собственник РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК

Периодичность: 4 раза в год

Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казахстан.

Регистрационное свидетельство №16999-ж от 27.03.2018г.

Тираж: 30 экземпляров

Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Кажимукана, 12/1,

тел.: (7172)709-500 (вн. 31-428)

*Editor-in-Chief*  
Doctor of Phys.-Math. Sciences  
**A.K. Aryngazin** (Kazakhstan)

*Deputy Editor-in-Chief*

**A.T. Akilbekov**, Doctor of Phys.-Math. Sciences,  
prof. (Kazakhstan)

*Editorial board*

<b>Aldongarov A.A.</b>	PhD (Kazakhstan)
<b>Balapanov M.Kh.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, prof. (Russia)
<b>Bakhtizin R.Z.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, prof. (Russia)
<b>Dauletbekova A.K.</b>	Candidate of Phys.-Math. Sciences, PhD (Kazakhstan)
<b>Giniyatova Sh.G.</b>	Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)
<b>Kadyrzhanov K.K.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, prof. (Kazakhstan)
<b>Kainarbay A.Zh.</b>	Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)
<b>Kuterbekov K.A.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, prof. (Kazakhstan)
<b>Lushchik A.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, prof. (Estonia)
<b>Morzabayev A.K.</b>	Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)
<b>Myrzakulov R.K.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, prof. (Kazakhstan)
<b>Nurakhmetov T.N.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, prof. (Kazakhstan)
<b>Sautbekov S.S.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, prof. (Kazakhstan)
<b>Tleukenov S.K.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, prof. (Kazakhstan)
<b>Useinov A.B.</b>	PhD (Kazakhstan)
<b>Yerzhanov K.K.</b>	Candidate of Phys.-Math. Sciences, PhD(Kazakhstan)
<b>Zdorovets M.</b>	Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)
<b>Zhumadilov K.Sh.</b>	PhD (Kazakhstan)

*Editorial address:* 2, Satpayev str., of.408, Astana, Kazakhstan, 010008  
Tel.: (7172) 709-500 (ext. 31-428)  
E-mail: vest\_phys@enu.kz

*Responsible secretary, computer layout:*  
A.Nurbolat

**Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. PHYSICS. ASTRONOMY Series**

Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan

Periodicity: 4 times a year

Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan. Registration certificate №16999-ж from 27.03.2018. Circulation: 25 copies

Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Astana, Kazakhstan 010008;  
tel.: (7172) 709-500 (ext. 31-428)

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ  
ХАБАРШЫСЫ. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ сериясы

№1(122)/2018

МАЗМҰНЫ

**ФИЗИКА**

<i>Ақылбеков А.Т., Бижанова С.Б., Баубекова Г.М., Карипбаев Ж.Т.</i> «Таза» кристалдардың импульстік катодолюминесценция спектрлері	8
<i>Ахметова Г.А.</i> DVB-T және DVB-T2 жерсеріктік эфирлік хабар тарату желісінің қамту аймағын анықтаудың стандарттары мен әдіснамасын салыстыру	13
<i>Алдонгаров А.А., Асылбекова А.М., Иргібаева И.С., Ермекова Ж.К.</i> Родамин бояғышы мен CdS кластерлерінің кешендерінде электрондық ауысулардың табиғатын анықтау	19
<i>Бекова Г.Т., Уалиханова У.А., Есмаханова К.Р.</i> (2+1)-комплекті модификациялан Кортевег–де Фриз және Максвелл–Блох теңдеулерінің сақталу заңдары	28
<i>Борзев Д.Б., Здоровец М.В., Козловский А.Л.</i> Сыртқы факторлардың әсерінен металл наноқұрылымдарының құлдырауын зерттеу	33
<i>Қадыржанов Д.Б., Здоровец М.В., Козловский А.Л., Петров А.В.</i> Zn нанотүтікшелерінің құрылымдық қасиеттеріне сәулелендіру әсерін зерттеу	40
<i>Калиекперов М.Е., Козловский А.Л., Қадыржанов К.К.</i> Полимерлік матрицалар негізінде иондаушы сәуледен жұқа қорғаныш жабындарын синтездеу	46
<i>Жасыбаева М.Б., Нугманова Г.Н.</i> Интегралданатын Фокас-Ленэллстың теңдеуіне эквивалентті спиндік жүйе	53
<i>Есмаханова К.Р., Жубаева Ж.С., Тәпеева С.Қ.</i> (1+1)-өлшемді локалды емес бейсызықты Шредингер теңдеуінің нақты шешімдері	58
<i>Мусабаева Г.К., Ақылбеков А.Т., Мусабаев К.К.</i> Атомдардың өздігінен сәуле шығаруы туралы	64
<i>Мурзалынов Д.О., Власукова Л.А., Пархоменко И.Н., Комаров Ф.Ф., Ақылбеков А.Т., Мудрый А.В., Рябикин Ю.А., Гиниятова Ш.Г., Даулетбекова А.К.</i> Азотпен имплантталған кремний нитридті қабықшаларының люминесценциясы	68
<i>Морзабаев А.К., Гиниятова Ш.Г., Шаханова Г.А., Алымханова К., Айданұлы Б., Махмұтов В.С.</i> Астана қаласының Жер беті маңындағы дозалық және электрлік сипаттамаларын талдау	75
<i>Даулетбекова А., Баймұханов З., Козловский А., Гиниятова Ш., Мурзағалиев М., Журкин Е., Наурызбаева Р.</i> SiO <sub>2</sub> /Si тіректі темплэйт негізінде нанокөмізгітті материалдарды зерттеу және әзірлеу	82
<i>Даулетбекова А., Скуратов В., Маника И., Маникс Я., Забельс Р., Кирилкин Н., Ақылбеков А., Гиниятова Ш., Байжуманов М., Сейтбаев А., Кудайбергенова С.</i> Люминесценцияның өшуінің дислокациялану механизмі	91

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. Серия ФИЗИКА.

№1(122)/2018

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА	
<i>Акылбеков А.Т., Бижанова С.Б., Баубекова Г.М., Карипбаев Ж.Т.</i> Спектры импульсной катодолюминесценции «чистых» кристаллов	8
<i>Ахметова Г.</i> Сравнение стандартов и методика определения зоны покрытия сети цифрового наземного вещания DVB-T и DVB-T2	13
<i>Алдонгаров А.А., Асылбекова А.М., Иргибоева И.С., Ермекова Ж.К.</i> Определение природы электронных переходов в комплексах родаминового красителя и кластерах CdS	19
<i>Бекова Г.Т., Уалиханова У.А., Есмаханова К.Р.</i> Законы сохранения для (2+1)-мерных уравнений комплексно модифицированного Кортевега-де Фриза и Максвелла-Блоха	28
<i>Боржекков Д.Б., Здоровец М.В., Козловский А.Л.</i> Изучение деградации металлических наноструктур под действием внешних факторов	33
<i>Кадыржанов Д.Б., Здоровец М.В., Козловский А.Л.</i> Петров А.В, Исследование влияния облучения на структурные свойства Zn нанотрубок	40
<i>Калиекперов М.Е., Козловский А.Л., Кадыржанов К.К.</i> Синтез тонких защитных покрытий от ионизирующего излучения на основе полимерных матриц	46
<i>Жасыбаева М.Б., Нугманова Г.Н.</i> Спиновая система, эквивалентная интегрируемому уравнению Фокаса-Ленэллса	53
<i>Есмаханова К.Р., Жубаева Ж.С., Тапеева С.Қ.</i> Нелокальные нелинейные уравнения Шредингера и ее точные решения	58
<i>Мусабаева Г.К., Акылбеков А.Т., Мусабаев К.К.</i> К вопросу возникновения спонтанного излучения атомов	64
<i>Мурзалинов Д.О., Власукова Л.А., Пархоменко И.Н., Комаров Ф.Ф., Акылбеков А.Т., Мудрый А.В., Рябикин Ю.А., Даулетбекова А.К., Гиниятова Ш.Г.</i> Люминесценция пленок нитрида кремния, имплантированных азотом	68
<i>Морзабаев А.К., Гиниятова Ш.Г., Шаханова Г.А., Алимханова К., Айданұлы Б., Махмұтов В.С.</i> Анализ дозовых и электрических характеристик в приземном слое атмосферы г. Астаны	75
<i>Даулетбекова А., Баймуханов З., Козловский А., Гиниятова Ш., Мурзагалиев М., Журкин Е., Наурызбаева Р.</i> Разработка и исследование нанокompозитных материалов на основе трекового темплэйта $SiO_2/Si$	82
<i>Даулетбекова А., Скуратов В., Маника И., Маникс Я., Забельс Р., Кирилкин Н., Акылбеков А., Гиниятова Ш., Байжуманов М., Сейтбаев А., Кудайбергенова С.</i> Дислокационный механизм затухания люминесценции	91

BULLETIN OF L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY.  
PHYSICS.ASTRONOMY SERIES

№1(122)/2018

CONTENTS

PHYSICS

<i>Akylbekov A.T., Bizhanova S.B., Baubekova G.M., Karipbayev Zh.T.</i> The pulsed cathodoluminescence spectra of "pure" crystals	8
<i>Akhmetova G.</i> Comparison of standards and methodology of determining the coverage area of the digital terrestrial broadcasting network DVB-T and DVB-T2	13
<i>Aldongarov A.A., Assilbekova A.M., Irgibaeva I.S., Ermekova Zh.K.</i> Determination of the nature of electronic transitions in the complexes of rhodamine dye and CdS clusters	19
<i>Bekova G.T., Ualikhanova U.A., Yesmakhanova K.R.</i> Conservation laws of the (2+1)-dimensional complex modified Korteweg-de Vries and Maxwell-Bloch equations	28
<i>Borgekov D.B., Zdorovets M.V., Kozlovskiy A.L.</i> Study of the degradation of metallic nanostructures under the influence of external factors	33
<i>Kadyrzhanov D.B., Zdorovets M.V., Kozlovskiy A.L., Petrov A.V.</i> Investigation of the effect of irradiation on the structural properties of Zn nanotubes	40
<i>Kaliyekperov M.E., Kozlovskiy A.L., Kadyrzhanov K.K.</i> Synthesis of thin protective coatings from ionizing radiation based on polymer template	46
<i>Nugmanova G.N., Zhassybayeva M.B.</i> Spin system equivalent to the integrable Fokas-Lenells equation	53
<i>Yesmakhanova K.R., Zhubaeva Zh.S., Tapeyeva S.K.</i> Exact solutions of the (1+1)-dimensional nonlocal nonlinear Schrodinger equation	58
<i>Musabayeva G.K., Akylbekov A.T., Musabayev K.K.</i> On the origin of spontaneous emission of atoms	64
<i>Murzalinov D.O., Vlasukova L.A., Parkhomenko I.N., Komarov F.F., Akilbekov A.T., Mudryi A.V., Ryabikin Yu.A., Giniyatova Sh.G., Dauletbekova A.K.</i> The photoluminescence of nitrogen-implanted silicon nitride films	68
<i>Morzabaev A.K., Giniyatova Sh.G., Shakhanova G.A., Alimkhanova K., Aidanuli B., Makhmutov B.S.</i> Analysis of dose and electrical characteristics in the underground layer of astana atmosphere	75
<i>Dauletbekova A., Baymukhanov Z., Kozlovskii A., Giniyatova Sh., Murzagaliyev M., Zhurkin E., Nauryzbaeva P.</i> Development and research for nanocomposite materials based on track templates of $SiO_2/Si$	82
<i>Dauletbekova A., Skuratov V., Manika I., Maniks J., Zabels R., Kirilkin N., Akilbekov A., Giniyatova Sh., Baizhumanov M., Seitbayev A., Kudaibergenova S.</i> Dislocation mechanism of fading of luminescence intensity	91

МРНТИ 27.25.19, 29.05.03

Г.Т. Бекова<sup>1</sup>, У.А. Уалиханова<sup>2</sup>, К.Р. Есмаханова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан*

<sup>2</sup> *Тартуский университет, Тарту, Эстония*

*(E-mail: bekovaguldana@gmail.com, ulbossyn.ualikhanova@yahoo.com, kryesmakhanova@gmail.com)*

### **Законы сохранения для (2+1)-мерных уравнений комплексно модифицированного Кортевега-де Фриза и Максвелла-Блоха**

**Аннотация:** В настоящее время уравнение кмКдФ используется в паре с системой уравнений Максвелла-Блоха, и поэтому вместе они называются уравнениями комплексно модифицированного Кортевега-де Фриза и Максвелла-Блоха (кмКдФ и МБ). Кроме того, эти уравнения могут быть получены восстановлением системы уравнений Хироты-Максвелла-Блоха (ХМБ). Редукциями этого уравнения являются нелинейное уравнение Шредингера, нелинейное уравнение Шредингера-Маквелла-Блоха и уравнение Кортевега-де Фриза-Максвелла-Блоха. Эти уравнения изучены разными авторами. Представлены пары Лакса этих уравнений. Используя пары Лакса, построены преобразования Дарбу, а именно однократные преобразования. Солитонные решения получаются из разных «seed», используя эти преобразования Дарбу. Используя преобразования Дарбу получены однократное, двухкратные и N-кратные представления детерминанта. А также построены солитонные решения. В настоящей работе получены законы сохранения для (2+1)-мерных уравнений комплексно модифицированного Кортевега-де Фриза и Максвелла-Блоха через представление Лакса.

**Ключевые слова:** Законы сохранения для (2+1)-мерных уравнений комплексно модифицированного Кортевега-де Фриза и Максвелла-Блоха.

**Введение.** Теория нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) привлекла большое внимание среди исследователей и фундаментально связана с несколькими основными разработками в области теории солитонов.

Известно, что нелинейные уравнения, такие как уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ), уравнение модифицированного Кортевега-де Фриза (мКдФ) и нелинейное уравнение Шредингера являются наиболее типичными и хорошо изученными интегрируемыми эволюционными уравнениями, описывающими нелинейные волновые явления для целого ряда дисперсных физических систем. Одним из обобщений уравнения мКдФ является уравнение комплексно мКдФ (кмКдФ), которое является одним из хорошо известных и вполне интегрируемых уравнений в теории солитонов. Оно обладает всеми основными характеристиками интегрируемых моделей. С физической точки зрения уравнение кмКдФ выведено, например, для фундаментальной эволюции нелинейной решетки, гидродинамики, физики плазмы, ультра-коротких импульсов в нелинейной оптике, нелинейной линии передачи и так далее [1-2].

В настоящее время уравнение кмКдФ используется в паре с системой уравнений Максвелла-Блоха, и поэтому они называются уравнениями комплексно модифицированного Кортевега-де Фриза и Максвелла-Блоха (кмКдФ и МБ). Кроме того, эти уравнения могут быть получены восстановлением системы уравнений Хироты-Максвелла-Блоха (ХМБ). Редукциями этого уравнения являются нелинейное уравнение Шредингера, нелинейное уравнение Шредингера-Маквелла-Блоха и уравнение Кортевега-де Фриза-Максвелла-Блоха. Эти уравнения изучены в работах [3-5], используя преобразования Дарбу получены однократное, двухкратные и N-кратные представления детерминанта, а также построены солитонные решения.



**(2+1)-мерные уравнения комплексно модифицированного КдФ и Максвелла-Блоха.** В этой работе наша цель состоит в нахождении законов сохранения для (2+1)-мерных уравнений комплексно модифицированного КдФ и Максвелла-Блоха через представление Лакса. (2+1)-мерная система уравнений Хироты-Максвелла-Блоха имеет вид [3]

$$\begin{aligned} iq_t + \epsilon_1 q_{xy} + i\epsilon_2 q_{xxy} - vq + i(wq)_x - 2ip &= 0, \\ v_x + 2\epsilon_1 \delta(|q|^2)_y - 2i\epsilon_2 \delta(q_{xy}^* q - q^* q_{xy}) &= 0, \\ w_x - 2\epsilon_2 \delta(|q|^2)_y &= 0, \\ p_x - 2i\omega p - 2\eta q &= 0, \\ \eta_x + \delta(q^* p + p^* q) &= 0, \end{aligned}$$

где  $q, p$ -комплексные функции,  $v, w, \eta$ -действительные функции,  $\epsilon_1, \epsilon_2, \delta, \omega$  - действительные постоянные. Символ  $*$  обозначает комплексное сопряжение. Эта система уравнений допускает несколько интегрируемых редукции. Одна из них, получается когда  $\epsilon_1 = \epsilon_2 - 1 = 0$ . Вэтом случае получаем (2+1)-мерные уравнения комплексно модифицированного Кортевега-де Фриза и Максвелла-Блоха [4]:

$$iq_t + i\epsilon_2 q_{xxy} - vq + i(wq)_x - 2ip = 0, \quad (1)$$

$$v_x - 2i\epsilon_2 \delta(q_{xy}^* q - q^* q_{xy}) = 0, \quad (2)$$

$$w_x - 2\epsilon_2 \delta(|q|^2)_y = 0, \quad (3)$$

$$p_x - 2i\omega p - 2\eta q = 0, \quad (4)$$

$$\eta_x + \delta(q^* p + p^* q) = 0. \quad (5)$$

где  $q, p$ -комплексные функции,  $v, w, \eta$ -действительные функции,  $\omega, \delta$ -действительные постоянные, через " $*$ " обозначим комплексное сопряжение.

**Представление Лакса.** (2+1)-мерные уравнения комплексно модифицированного КдФ и Максвелла-Блоха могут быть интегрированы с помощью метода обратной задачи рассеяния. Уравнения представляют собой условие совместности двух линейных дифференциальных уравнений:

$$\Psi_x = A\Psi, \quad (6)$$

$$\Psi_t = 4\lambda^2 \Psi_y + B\Psi, \quad (7)$$

Здесь  $\Psi = (\psi_1, \psi_2)^T$  -двухкомпонентный вектор-столбец, зависящий от  $x, y, t$  и некоторого произвольного комплексного числа  $\lambda$ , получившего название "спектральный параметр",  $A$  и  $B$  - матрицы размера  $2 \times 2$ :

$$\begin{aligned} A &= -i\lambda\sigma_3 + A_0, \\ B &= \lambda B_1 + B_0 + \frac{i}{\lambda + \omega} B_{-1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= iw\sigma_3 + 2i\sigma_3 A_{0y}, \\ A_0 &= \begin{pmatrix} 0 & q \\ -r & 0 \end{pmatrix}, \\ B_0 &= -\frac{i}{2}\nu\sigma_3 + \begin{pmatrix} 0 & -q_{xy} - wq \\ r_{xy} + wr & 0 \end{pmatrix}, \\ B_{-1} &= \begin{pmatrix} \eta & -p \\ -\kappa & -\eta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и  $r = \delta q^*, \kappa = \delta p^*$ , а так же  $\delta = \pm 1$ .

Выполнение условия совместности для вспомогательной линейной задачи

$$A_t - 4\lambda^2 A_y - B_x + [A, B] = 0 \quad (8)$$

эквивалентно выполнению системы уравнения (1)-(5). Запись системы уравнения (1)-(5) в виде (8) принято называть представлением нулевой кривизны.

**Законы сохранения.** Система уравнений (1)–(5) интегрируется методом обратной задачи рассеяния (МОЗР). Одной из наиболее важных удач на ранней стадии развития МОЗР было открытие бесконечного набора локальных законов сохранения уравнения КдФ (Миура, Гарднер, Краскал (1968)). Это открытие с аналогичными результатами для мКдФ привело к преобразованию Миуры, связывающему решения этих двух уравнений, и в конце концов, к задаче рассеяния для оператора Шредингера [5]. Также были предложены несколько способов вывода законов сохранения, например, через представление Лакса [6], преобразование Бэклунда [6], формальные решения собственных функций [7,8], задачу рассеяния [6,7] и квази-дифференциального оператора, основанного на теории Сато [9].

Далее мы покажем, существование бесконечного набора сохраняющихся величин для (2+1)-мерных уравнений мКдФ и МБ. Для этого найдем законы сохранения для системы (1)–(5). Из  $\Gamma = \psi_1/\psi_2$  и  $\bar{w} = iq$  [10] уравнение типа Риккати может быть получено через представление Лакса (6):

$$\bar{w}_x - \frac{q_x}{q}\bar{w} + i|q|^2 - 2i\lambda\bar{w} - i\bar{w}^2 = 0. \quad (9)$$

Перепишем  $\bar{w}$  в виде степенного ряда по отношению к  $1/\lambda$ ,

$$\bar{w} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{w}_n}{\lambda^n}. \quad (10)$$

Подставляя ряд (10) в уравнение Риккати (9) и приравнивая выражения при одинаковых степенях  $\lambda$ , получим формулу рекурсии:

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= \frac{1}{2}|q|^2, \\ \bar{w}_{n+1} &= -\frac{iq_t}{2q}\bar{w}_n - \frac{i}{2}(\bar{w}_{nt} + \sum_{j=1}^m \bar{w}_j\bar{w}_{n-j}), \\ \bar{w}_0 &= 0, n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Из уравнения (11) находим, что

$$\begin{aligned} \bar{w}_2 &= -\frac{i}{4}qq_x^*, \\ \bar{w}_3 &= -\frac{1}{8}(|q|^4 + qq_{xx}^*). \end{aligned}$$

Приведенные выше выражения подставляя в условие совместимости  $(\psi_{1t}/\psi_1)_x = (\psi_{1x}/\psi_1)_t$ , получим бесконечное количество законов сохранения для системы (1)–(5):

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \frac{\partial J_i}{\partial x}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

В соответствии с [10],  $\rho_i$  и  $J_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) являются сохраняющейся плотностью и потоком, соответственно. Первые три закона сохранения, которые описывают энергию, импульс и гамильтониан, имеют следующий вид:

$$\rho_1 = -\frac{i}{2}|q|^2, \quad (12)$$

$$\rho_2 = -\frac{i}{2}\omega|q|^2 - \frac{1}{4}qq_x^*, \quad (13)$$

$$\rho_3 = -\frac{i}{8}|q|^4 - \frac{1}{4}\omega qq_x^* - \frac{i}{8}qq_{xx}^*, \quad (14)$$

При выводе (12)–(14) мы не использовали (7), поэтому эти выражения совпадают для любых уравнений разрешимых посредством (6).

$$\begin{aligned} J_1 &= 8i\omega^3\eta - 4\omega^2pq^* + 2i\omega pq_x^* - pq^*|q|^2 - pq_{xx}^*, \\ J_2 &= 4i\omega^2q_{xy}q^* - 4\omega^2q_yq_x^* + 4i\omega^2w|q|^2 + 4\omega^2pq_x^* - 2i\omega pq_x^* + pq^*|q|^2 + pq_{xx}^*, \\ J_3 &= 2i\omega^2pq_x^* - 2i\omega^3q_yq_x^*|q|^2 - 2i\omega^3q_yq_{xx}^* + 2\omega^3q_{xy}q_x^* - 2\omega^3wqq_x^* - \omega pq^*|q|^2 - pq_{xx}^*. \end{aligned}$$

**Заклучение.** В данной работе впервые были найдены законы сохранения для  $(2+1)$ -мерных уравнений комплексно модифицированного Кортевега–де Фриза и Максвелла–Блоха, играющие важную роль в создании полной интегрируемости дифференциальных уравнений в частных производных. Отметим, что сохраняющиеся плотности совпадают для всех уравнений вида (9), но соответствующие потоки зависят от рассматриваемого представления Лакса.

### Список литературы

- 1 Ablowitz M.J. and Clarkson P.A. Solitons. Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge, NY. Cambridge University Press. 1991. -P.70.
- 2 Jingsong He, Lihong Wang, Linjing Li, Porsezian K. and Erdelyi R. Few-cycle optical rogue waves: Complex modified Korteweg de Vries equation // arXiv.org:1405.7845v1.
- 3 Myrzakulov R., Mamyrbekova G. K., Nugmanova G. N., Lakshmanan M. Integrable  $(2+1)$ -dimensional spin models with self-consistent potentials // Symmetry. -2015. -V.7. № 3. -P.1352-1375.
- 4 Yesmakhanova K., Bekova G., Shaikhova G., Myrzakulov R. Soliton solutions of the  $(2+1)$ -dimensional complex modified Korteweg-de Vries and Maxwell-Bloch equations // IOP Publishing Journal of Physics: Conference Series. -2016. -V.738. -P.012018.
- 5 Ablowitz M.J., Segur H. Solitons and the Inverse Scattering Transform // Studies in Applied and Numerical Mathematics, Philadelphia. -1981. -P.69.
- 6 Allen L. and Eberly J.H. Optical Resonance and Two-Level Atoms. New York: Wiley. 1975.
- 7 McCall S.L. and Hahn E.L. Self-Induced Transparency by Pulsed Coherent Light // Phys. Rev. Lett. -1967. V.18. -P.908-911.
- 8 Lamb G.L. Elements of Soliton Theory. New York: Wiley. 1980.
- 9 Porsezian K. and Nakkeeran K. Optical Soliton Propagation in a Coupled System of the Nonlinear Schrodinger Equation and the Maxwell-Bloch Equations // J.Mod.Opt. -1995. -V.42. -P.1953-1958.
- 10 Rui Guo, Bo Tian, Xing Lu, Hai-Qiang Zhang and Wen-Jun Liu. Darboux Transformation and Soliton Solutions for the Generalized Coupled Variable-Coefficient Nonlinear Schrodinger-Maxwell-Bloch System with Symbolic Computation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. -2012. V.52. № 4. -P.565577.

Г.Т. Бекова<sup>1</sup>, У.А. Уалиханова<sup>2</sup>, К.Р. Есмаханова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан,

<sup>2</sup> Тарту университеті, Тарту, Эстония

### $(2+1)$ -комплектті модификациялан Кортевег–де Фриз және Максвелл–Блох теңдеулерінің сақталу заңдары

**Аннотация:** Қазіргі уақытта кмКдФ теңдеуі Максвелл–Блох теңдеумен бірге пайдаланылады және теңдеу – сондықтан комплексті модифицирвалық Кортевег–де Фриз және Максвелл–Блох теңдеулері деп аталады. Сонымен қатар, осы теңдеулер жүйесін Хирота–Максвелл–Блох теңдеуінен дербес жағдайы ретінде алуға болады. Ал берілген теңдеуден түрлендіру арқылы сызықты емес Шредингер теңдеуін, сызықты емес Шредингер–Максвелл–Блох теңдеулерін қорытуға болады. Бұл теңдеулер түрлерін әртүрлі авторлар зерттеген. Осы теңдеулердің Лакс жұбы құрылған. Лакс жұбы арқылы Дарбу түрлендіруі пайдаланып, бірретті, екіретті және  $N$ -ретті анықтауыш көрнісі құрылды. Бұл жұмыста  $(2+1)$ -өлшемді комплексті модификациялан Кортевег де Фриз және Максвелл–Блох теңдеулері үшін Лакс жұбын қолдана отырып сақталу заңдарын алдық.

**Түйін сөздер:** комплексті модификацияланған КдФ және Максвелл теңдеуі, Лакс көрнісі, интегралдану, сақталу заңдары.

G.T. Bekova<sup>1</sup>, U.A. Ualikhanova<sup>2</sup>, K.R. Yesmakhanova<sup>1</sup>

<sup>1</sup> L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan,

<sup>2</sup> University of Tartu, Tartu, Estonia

### Conservation laws of the $(2+1)$ -dimensional complex modified Korteweg-de Vries and Maxwell-Bloch equations

**Abstract:** At present, the kmKdF equation is used in conjunction with the Maxwell-Bloch equations, and therefore they are collectively called the equations of the complexly modified Korteweg-de Vries and Maxwell-Bloch (kmKdF and MB). In addition, these equations can be obtained by reconstructing the Hirota–Maxwell-Bloch (HMB) system of equations. The reductions of this equation are the nonlinear Schrodinger equation, the nonlinear Schrodinger-Mcwell-Bloch equation, and the Korteweg-de Vries–Maxwell-Bloch equation. These equations have been studied by different authors. The Lax pairs of these equations are presented. Using Lax pairs, Darboux transformations are constructed, namely, single transformations. Soliton solutions are obtained from different "seed" solutions using these Darboux transformations. Using the Darboux transformations one-fold, two-fold and  $N$ -fold the determinant representations of Darboux transformations are obtained. And also soliton solutions are built.

In this paper, we obtain the conservation laws of the  $(2+1)$ -dimensional complex modified Korteweg-de Vries and Maxwell-Bloch equations through the Lax pair.

**Keywords:** the complex-modified KdV and Maxwell-Bloch equations, Lax representation, Integrability, Conservation Laws.

## References

- 1 Ablowitz M.J. and Clarkson P.A. Solitons. Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering (Cambridge University Press, Cambridge, NY, 1991).
- 2 Jingsong He, Lihong Wang, Linjing Li, Porseizian K. and Erdely R. Few-cycle optical rogue waves: Complex modified Korteweg de Vries equation, arXiv.org:1405.7845v1.
- 3 Myrzakulov R., Mamyrbekova G. K., Nugmanova G. N., Lakshmanan M. Integrable (2+1)-dimensional spin models with self-consistent potentials, Symmetry. **7**(3). (2015).
- 4 Yesmakhanova K., Bekova G., Shaikhovala G., Myrzakulov R. Soliton solutions of the (2+1)-dimensional complex modified Korteweg-de Vries and Maxwell-Bloch equations, IOP Publishing Journal of Physics: Conference Series. **738**. (2016).
- 5 Ablowitz M.J., Segur H. Solitons and the Inverse Scattering Transform, Studies in Applied and Numerical Mathematics, Philadelphia. -1981.
- 6 Allen L. and Eberly J.H. Optical Resonance and Two-Level Atoms (Wiley, New York, 1975).
- 7 McCall S.L. and Hahn E.L. Self-Induced Transparency by Pulsed Coherent Light, Phys. Rev. Lett. **18**. (1967).
- 8 Lamb G.L. Elements of Soliton Theory (Wiley, New York, 1980).
- 9 Porseizian K. and Nakkeeran K. Optical Soliton Propagation in a Coupled System of the Nonlinear Schrodinger Equation and the Maxwell-Bloch Equations, Journal of Modern Optics, **42**, (1995).
- 10 Rui Guo, Bo Tian, Xing Lu, Hai-Qiang Zhang and Wen-Jun Liu. Darboux Transformation and Soliton Solutions for the Generalized Coupled Variable-Coefficient Nonlinear Schrodinger-Maxwell-Bloch System with Symbolic Computation, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **524** (2012).

### Сведения об авторах:

*Бекова Г.Т.* - Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Мұнайтпасов көш. 13, Астана, Қазақстан.

*Уалиханова У.А.* - Тарту университеті, Юликооли 18, Тарту, Эстония.

*Есмаханова К.Р.* - Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Мұнайтпасов көш. 13, Астана, Қазақстан.

*Bekova G.T.* - L.N. Gumilyov Eurasian National University, Munaitpasov str., Astana, Kazakhstan.

*Ualikhanova U.A.* - University of Tartu, Ulikooli 18, Tartu, Estonia.

*Yesmakhanova K.R.* - L.N. Gumilyov Eurasian National University, Munaitpasov str., Astana, Kazakhstan.

*Поступила в редакцию 23.01.2018*