

ISSN (Print) 2616-6836  
ISSN (Online) 2663-1296

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

# ХАБАРШЫСЫ

---

**BULLETIN**

of L.N. Gumilyov Eurasian  
National University

**ВЕСТНИК**

Евразийского национального  
университета имени Л.Н. Гумилева

**ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ** сериясы

**PHYSICS. ASTRONOMY** Series

Серия **ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ**

№4(125)/2018

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Астана, 2018  
Astana, 2018

*Бас редакторы*  
ф.-м.ғ. докторы  
**А.Қ. Арынгазин** (Қазақстан)

*Бас редактордың орынбасары*

**А.Т. Ақылбеков**, ф.-м.ғ.д., профессор  
(Қазақстан)

*Редакция алқасы*

<b>Алдонгаров А.А.</b>	PhD (Қазақстан)
<b>Балапанов М.Х.</b>	доктор ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
<b>Бахтизин Р.З.</b>	доктор ф.-м.ғ.д., проф. (Ресей)
<b>Гиниятова Ш.Г.</b>	ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)
<b>Даулетбекова А.Қ.</b>	ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)
<b>Ержанов Қ.К.</b>	ф.-м.ғ.к., PhD (Қазақстан)
<b>Жұмаділов Қ.Ш.</b>	PhD (Қазақстан)
<b>Здоровец М.</b>	ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)
<b>Қадыржанов Қ.К.</b>	доктор ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
<b>Кайнарбай А.Ж.</b>	ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)
<b>Кутербеков Қ.А.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
<b>Лушик А.Ч.</b>	доктор ф.-м.ғ.д., проф. (Эстония)
<b>Морзабаев А.К.</b>	ф.-м.ғ.к. (Қазақстан)
<b>Мырзақұлов Р.Қ.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
<b>Нұрахметов Т.Н.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
<b>Сауытбеков С.С.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
<b>Тлеукенов С.К.</b>	ф.-м.ғ.д., проф. (Қазақстан)
<b>Усеинов А.Б.</b>	PhD (Қазақстан)

*Редакцияның мекенжайы:* 010008, Қазақстан, Астана қ., Сатпаев к-сі, 2, 349 б., Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті.  
Тел.: +7(7172) 709-500 (ішкі 31-428)  
E-mail: vest\_phys@enu.kz

*Жауапты хатшы, компьютерде беттеген:* А. Нұрболат

**Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.**  
**ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ сериясы**

Меншіктенуші: ҚР БжҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК  
Мерзімділігі: жылына 4 рет.

Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігімен  
тіркелген. 27.03.2018ж. №16999-ж тіркеу куәлігі.

Тиражы: 20 дана

Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Астана қ., Қажымұқан к-сі, 12/1, 349 б., Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті. Тел.: +7(7172)709-500 (ішкі 31-428)

*Editor-in-Chief*  
Doctor of Phys.-Math. Sciences  
**A.K. Aryngazin** (Kazakhstan)

*Deputy Editor-in-Chief*

**A.T. Akilbekov**, Doctor of Phys.-Math. Sciences,  
Prof. (Kazakhstan)

*Editorial board*

<b>Aldongarov A.A.</b>	PhD (Kazakhstan)
<b>Balapanov M.Kh.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Russia)
<b>Bakhtizin R.Z.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Russia)
<b>Dauletbekova A.K.</b>	Candidate of Phys.-Math. Sciences, PhD (Kazakhstan)
<b>Giniyatova Sh.G.</b>	Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)
<b>Kadyrzhanov K.K.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
<b>Kainarbay A.Zh.</b>	Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)
<b>Kuterbekov K.A.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
<b>Lushchik A.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Estonia)
<b>Morzabayev A.K.</b>	Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)
<b>Myrzakulov R.K.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
<b>Nurakhmetov T.N.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
<b>Sautbekov S.S.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
<b>Tleukenov S.K.</b>	Doctor of Phys.-Math. Sciences, Prof. (Kazakhstan)
<b>Useinov A.B.</b>	PhD (Kazakhstan)
<b>Yerzhanov K.K.</b>	Candidate of Phys.-Math. Sciences, PhD(Kazakhstan)
<b>Zdorovets M.</b>	Candidate of Phys.-Math. Sciences (Kazakhstan)
<b>Zhumadilov K.Sh.</b>	PhD (Kazakhstan)

*Editorial address:* L.N. Gumilyov Eurasian National University, 2, Satpayev str., of. 349, Astana,  
Kazakhstan, 010008  
Tel.: (7172) 709-500 (ext. 31-428)  
E-mail: vest\_phys@enu.kz

*Responsible secretary, computer layout:* A.Nurbolat

**Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.**  
**PHYSICS. ASTRONOMY Series**

Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan

Periodicity: 4 times a year

Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.

Registration certificate №16999-ж from 27.03.2018.

Circulation: 20 copies

Address of printing house: L.N. Gumilyov Eurasian National University, 12/1 Kazhimukan str., Astana, Kazakhstan 010008;

tel.:+7(7172) 709-500 (ext. 31-428)

*Главный редактор*  
доктор ф.-м.н.  
**А.К. Арынгазин** (Казахстан)

*Зам. главного редактора*

**А.Т. Акилбеков**, доктор ф.-м.н.  
профессор (Казахстан)

*Редакционная коллегия*

<b>Алдонгаров А.А.</b>	PhD (Казахстан)
<b>Балапанов М.Х.</b>	ф.-м.н., проф. (Россия)
<b>Бахтизин Р.З.</b>	ф.-м.н., проф. (Россия)
<b>Гиниятова Ш.Г.</b>	кандидат ф.-м.н. (Казахстан)
<b>Даулетбекова А.К.</b>	кандидат ф.-м.н., PhD (Казахстан)
<b>Ержанов К.К.</b>	кандидат ф.-м.н., PhD (Казахстан)
<b>Жумадилов К.Ш.</b>	доктор PhD (Казахстан)
<b>Здоровец М.</b>	к.ф.-м.н. (Казахстан)
<b>Кадыржанов К.К.</b>	ф.-м.н., проф. (Казахстан)
<b>Кайнарбай А.Ж.</b>	кандидат ф.-м.н. (Казахстан)
<b>Кутербеков К.А.</b>	доктор ф.-м.н., проф. (Казахстан)
<b>Лущик А.Ч.</b>	ф.-м.н., проф. (Эстония)
<b>Морзабаев А.К.</b>	кандидат ф.-м.н. (Казахстан)
<b>Мырзакулов Р.К.</b>	доктор ф.-м.н., проф. (Казахстан)
<b>Нурахметов Т.Н.</b>	доктор ф.-м.н., проф. (Казахстан)
<b>Сауытбеков С.С.</b>	доктор ф.-м.н., проф. (Казахстан)
<b>Тлеукенов С.К.</b>	доктор ф.-м.н., проф. (Казахстан)
<b>Усеинов А.Б.</b>	PhD (Казахстан)

*Адрес редакции:* 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2, каб. 349 Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева.  
Тел.: (7172) 709-500 (вн. 31-428)  
E-mail: vest\_phys@enu.kz

*Ответственный секретарь, компьютерная верстка:* А. Нурболат

**Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.**  
**Серия ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ**

Собственник РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК  
Периодичность: 4 раза в год

Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казахстан.

Регистрационное свидетельство №16999-ж от 27.03.2018г.

Тираж: 20 экземпляров

Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Астана, ул. Кажимукана, 12/1, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева. тел.: +7(7172)709-500 (вн. 31-428)

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ  
ХАБАРШЫСЫ. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ сериясы

№4(125)/2018

МАЗМҰНЫ

<i>Оралбеков Н.Б., Усеинов А.Б., А.Т. Ақылбеков, А.К.Даулетбекова, М.В.Здоровец, Н.С.Ыбыраев, А.Б.Дукенов</i> ZnO (100) беттеріндегі CO <sub>2</sub> адсорбциясының ашық емес есептеулері	8
<i>Мендибаев К.О., Джансейитов Д.М., Кутербеков К.А., Жолдыбаев Т.К., Исатаев Т.Г., Азнабаев Д.Т., Валиолда Д.С., Кабышев А.М., Лукьянов С.М., Пеннионжскевич Ю.Э., Уразбеков Б.</i> Оптикалық және фолдинг модельдер аясында <sup>3</sup> He иондарының <sup>9</sup> Be ядроларында серпімді шашырау процесстерін зерттеу	16
<i>Каргин Д.Б., Конюхов Ю.В., Нгуен Ван Минь, Мухамбетов Д.Г., Козловский А.Л., Касымханов Ж.С., Бисикен А.Б.</i> Металлургиялық өндірістің қосалқы өнімдерін қайта өңдеудің экономикалық негіздемесі	25
<i>Бактиярқызы Ж., Шаихова Г.С.</i> Локальды емес комплексті модификацияланған Кортвег-де Фриз теңдеу жүйесінің нақты шешімдері	34
<i>Нугманова Г.Н.</i> Келісімді потенциалдары бар (1+1) өлшемдегі интегралданатын спиндік жүйелер	40
<i>Саттинова З.К., Рамазанова Г.И., Асылбеков Б.К., Ордабек А.К.</i> Құю процесіндегі бериллий керамикасының құрылымын эксперименттік және теориялық нәтижелерді салыстыра отырып зерттеу	50
<i>Жадыранова А.А., Мырзақұл Ж.Р., Ануарбекова Ы.Е.</i> $n = 3$ және $N = 2$ жағдайлары үшін $V_0 \neq 0$ болғандағы WDVV ассоциативтілік теңдеуінің иерархиясы	60

BULLETIN OF L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY. PHYSICS.  
ASTRONOMY SERIES

№3(124)/2018

CONTENTS

---

<i>Oralbekov N.B, Usseinov A.B, Akilbekov A.T, Dauletbekova A.K, Zdorovets M.V, Ybyraev N.S, Dukenov A.B.</i> Nonempirical calculations of CO <sub>2</sub> adsorption on (100) ZnO surfaces	8
<i>Mendibayev K.O, Janseitov D.M, Kuterbekov K.A, Zholdybayev T.K, Issatayev T.G, Aznabayev D.T, Valiolda D.S, Kabyshev A.M, Lukyanov S.M, Penionzhkevich Yu.E, Urazbekov B.</i> Investigation of the elastic scattering of <sup>3</sup> He from <sup>9</sup> Be in within the framework the optical and folding models	16
<i>Kargin D.B, Konyukhov Y.V, Nguyen Van Min, Mukhambetov D.G, Kozlovskiy A.L, Kassymkhanov Z.S</i> Economic feasibility of by-products processing of metallurgical production	25
<i>Bachtiyarkyzy Zh, Shaikhova G.S, Shaikhova G.N.</i> Exact solutions of the nonlocal complex modified Korteweg-de Vries system of equations	34
<i>Nugmanova G.N.</i> Integrable spin systems with self-consistent potentials in (1+1) dimensions	40
<i>Sattinova Z.K, Ramazanova G.I, Assilbekov B.K, Ordabek A.K.</i> Comparative analysis of experimental and theoretical data when investigating of the structure of beryllium ceramics in the channel of installation casting	50
<i>Zhadyranova A.A, Myrzakul Zh.R, Anuarbekova Y.Ye.</i> Hierarchy of WDVV associativity equations for $n = 3$ case and $N = 2$ when $V_0 \neq 0$	60

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. Серия ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ

№4(125)/2018

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Оралбеков Н.Б, Усеинов А.Б, Акылбеков А.Т, Даулетбекова А.К, Здоровец М .В, Ыбыраев Н.С, Дукенов А.Б.</i> Неэмпирические расчеты адсорбции CO <sub>2</sub> на (100) поверхности ZnO	8
<i>Мендибаев К.О, Джансейтов Д.М, Кутербекоев К.А, Жолдыбаев Т.К, Исатаев Т.Г, Азнабаев Д .Т, Валиолда Д.С, Кабышев А.М , Лукъянов С.М, Пенионжскевич Ю.Э , Уразбеков Б.</i> Исследование упругого рассеяния <sup>3</sup> He на ядрах <sup>9</sup> Be в рамках оптической и фолдинг - модели	16
<i>Каргин Д.Б, Конюхов Ю.В, Нгуен Ван Минь, Мухамбетов Д.Г, Козловский А.Л , Касымханов Ж.С, Бисикен А.Б.</i> Экономическая целесообразность переработки побочных продуктов металлургического производства	25
<i>Бактиярқызы Ж, Шаихова Г.С, Шайхова Г.Н.</i> Точные решения нелокальной комплексной модифицированной системы уравнений Кортевег-де Фриза	34
<i>Нугманова Г.Н.</i> Интегрируемые спиновые системы с самосогласованными потенциалами в (1+1) измерениях	40
<i>Саттинова З.К, Рамазанова Г.И, Асилбеков Б.К, Ордабек А.К.</i> Сравнительный анализ экспериментальных и теоретических данных при исследовании структуры бериллиевой керамики в канале установки литья	50
<i>Жадыранова А.А, Мырзакул Ж.Р, Ануарбекова Ы.Е.</i> Иерархия уравнений ассоциативности WDVV для случая $n = 3$ и $N = 2$ при $V_0 \neq 0$	60

Г.Н. Нугманова

*Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан  
(E-mail: nugmanovagn@gmail.com)*

**Интегрируемые спиновые системы с самосогласованными потенциалами в (1+1) измерениях**

**Аннотация:** Движение кривых и поверхностей в  $R^3$  приводит к нелинейным эволюционным уравнениям, которые часто интегрируемы. Они также тесно связаны с динамикой спиновых цепей в континуальном пределе и интегрируемыми солитонными системами через геометрические и калибровочно симметричные эквивалентности. В данной работе показано, что более общая ситуация, при которой кривые эволюционируют при наличии дополнительных самосогласованных векторных потенциалов, может привести к интересным обобщенным спиновым системам с самосогласованными потенциалами. Получен общий вид основных эволюционных уравнений кривых и приведены конкретные примеры обобщенных спиновых цепей и солитонных уравнений. К ним относятся главная киральная модель и различные спиновые уравнения Мырзакулова в (1+1) измерениях и их геометрические эквиваленты из семейства обобщенных нелинейных уравнений Шредингера (НУШ) в присутствии самосогласованного потенциала поля, включая уравнение Хирота-Максвелла-Блоха. Соответствующие калибровочные эквивалентные пары Лакса также представлены для подтверждения их интегрируемости.

**Ключевые слова:** спиновая система, геометрическая эквивалентность, калибровочное преобразование, представление Лакса, движение кривых и поверхностей.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-6836-2018-125-4-40-49>

**Введение.** Интегрируемые солитонные уравнения имеют интересные геометрические связи с движущимися пространственными кривыми и поверхностями как в (1+1), так и (2+1) измерениях [1-6]. Эти связи особенно проявляются через интегрируемые спиновые цепи. Одним из наиболее интересных связей является отображение цепочки спинов Гейзенберга на интегрируемом нелинейном уравнении Шредингера, где квадрат кривизны движущейся кривой связан с плотностью энергии спиновой цепи, а кручение связано с плотностью тока [7,8]. Для большинства из других солитонных уравнений также могут быть даны такие связи [1-3]. Это соотношение также можно интерпретировать как калибровочное преобразование между спиновыми системами и солитонными уравнениями так, что пары Лакса между двумя системами, а также условия нулевой кривизны могут отображаться друг на друга [9,10]. Рассмотрим дальнейшее обобщение спиновых систем путем включения дополнительного самосогласованного потенциала, в присутствии которого движутся кривые и поверхности. Приводим соответствующие обобщенные эволюционные уравнения для движущихся кривых в  $R^3$ . Затем выделим несколько интересных обобщенных спиновых систем и солитонных уравнений с самосогласованными потенциалами. Они включают в себя основное уравнение кирального поля, различные обобщения семейства спиновых уравнений Мырзакулова [11,12] в (1 + 1) размерностях и их геометрически эквивалентные аналоги - семейства обобщенных нелинейных уравнений Шредингера при наличии самосогласованных векторных полей.

**Движение кривых в (1+1) измерениях**

Рассмотрим пространственную кривую в  $R^3$ . В (1+1) измерениях движение таких кривых определяется следующими уравнениями Серре-Френе и уравнениями твердого тела [2] соответственно:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}, \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Здесь  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  и  $\vec{e}_3$  - единичные касательные, нормальные и бинормальные векторы соответственно к кривой и  $x$  - это параметр arclength, параметризующий кривую. Единичный



касательный вектор  $\vec{e}_1$  задается формулой  $\vec{e}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$ , где  $g$  - метрика  $g = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$  на кривой, для которой  $x(\theta, t) = \int_0^\theta \sqrt{g(\theta', t)} d\theta'$ . Здесь  $\theta$  определяет гладкую кривую, а  $\vec{r}(\theta, t)$  - позиция точки вектора на кривой в момент времени  $t$ . В формулах (1) матрицы  $C$  и  $G$  задаются в виде

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Как известно, кривизна и кручение кривой приведены, соответственно, как

$$\begin{aligned} \kappa &= (\vec{e}_{1x} \cdot \vec{e}_{1x})^{\frac{1}{2}}, \\ \tau &= \kappa^{-2} \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_{1x} \wedge \vec{e}_{1xx}). \end{aligned} \quad (3)$$

Условием совместности уравнения (1) является

$$C_t - G_x + [C, G] = 0, \quad (4)$$

или с точки зрения элементов оно читается

$$\kappa_t = \omega_{3x} + \tau \omega_2, \quad (5)$$

$$\tau_t = \omega_{1x} - \kappa \omega_2, \quad (6)$$

$$\omega_{2x} = \tau \omega_3 - \kappa \omega_1. \quad (7)$$

Вышеупомянутый формализм позволяет построить геометрические эквиваленты спиновых систем. Здесь мы приводим пример, показывающий, как работает этот формализм. Рассмотрим уравнение ферромагнетика Гейзенберга (УФГ) [7],

$$\vec{S}_t + \vec{S} \wedge \vec{S}_{xx} = 0, \quad (8)$$

где  $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$  - единичный вектор спина,  $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$ . Предположим идентификацию

$$\vec{e}_1 \equiv \vec{S}. \quad (9)$$

Тогда из УФГ (8) следует, что

$$\omega_1 = -\frac{\kappa_{xx}}{\kappa} + \tau^2, \quad (10)$$

$$\omega_2 = \kappa_x, \quad (11)$$

$$\omega_3 = \kappa \tau. \quad (12)$$

Подставляя эти выражения  $\omega_j$  в уравнения (5) - (7), мы приходим к системе

$$\kappa_t - (\kappa \tau)_x - \kappa_x \tau = 0, \quad (13)$$

$$\tau_t + \left( \frac{\kappa_{xx}}{\kappa} \right)_x - 2\tau \tau_x + \kappa \kappa_x = 0. \quad (14)$$

Введем следующую комплексную функцию  $q = \frac{\kappa}{2} e^{-i \partial_x^{-1} \tau}$ . Легко проверить, что эта функция удовлетворяет известному НУШ [7]

$$i q_t + q_{xx} + 2|q|^2 q = 0. \quad (15)$$

Таким образом, УФГ является геометрическим эквивалентом НУШ и наоборот. Наша цель - построить геометрически эквивалентные аналоги некоторых интегрируемых спиновых систем с самосогласованными потенциалами в (1+1) измерениях.

1. ДВИЖУЩИЕСЯ КРИВЫЕ В (1+1) ИЗМЕРЕНИЯХ ПРИ НАЛИЧИИ САМОСОГЛАСОВАННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Введем теперь самосогласованный векторный потенциал  $\vec{W}(x, t)$  в  $R^3$ , выводимый как

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial x} = \vec{W}_x = 2a\vec{W} \times \vec{e}_1, \quad (16)$$

где  $\vec{e}_1$  - единичный касательный вектор,  $a$  - постоянный параметр.

Выражая  $\vec{W}$  в базе единичной ортонормированной триады, определяющей движущуюся кривую как

$$\vec{W} = W_1(x, t)\vec{e}_1 + W_2(x, t)\vec{e}_2 + W_3(x, t)\vec{e}_3, \quad (17)$$

определяющие уравнения для компонент векторного потенциала можно переписать как

$$W_{1x} = \kappa W_2, \quad (18)$$

$$W_{2x} = -\kappa W_1 + \tau W_3 + 2aW_3, \quad (19)$$

$$W_{3x} = -\tau W_2 - 2aW_2. \quad (20)$$

Заметим, что из последних трех уравнений следует, что  $\vec{W}^2 = W_1^2 + W_2^2 + W_3^2 = C(t)$ , где  $C(t)$  - функция только от  $t$ .

При наличии потенциального поля эволюционное уравнение для движущейся кривой изменяется из-за самосогласованного взаимодействия. Основные эволюционные уравнения для триады можно определить следующим образом. Эволюцию для единичного касательного вектора можно модифицировать самосогласованным образом как

$$\vec{e}_{1t} = \vec{\Omega} \times \vec{e}_1 + 2a^{-1}\vec{W} \times \vec{e}_1, \quad (21)$$

где (из (1) и (2))

$$\vec{\Omega} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \vec{e}_i, \quad \vec{W} = \sum_{i=1}^3 W_i \vec{e}_i. \quad (22)$$

Теперь, используя уравнения Серре-Френе для пространственного изменения трехгранника вдоль длины дуги, см. (1), можно получить

$$\vec{e}_{2t} = \vec{\Omega} \times \vec{e}_2 + 2a^{-1}(-W_3\vec{e}_1 + (W_1 - 2a\frac{W_3}{\kappa})\vec{e}_3) \quad (23)$$

и

$$\vec{e}_{3t} = \vec{\Omega} \times \vec{e}_3 + 2a^{-1}(W_2\vec{e}_1 - (W_1 - 2a\frac{W_3}{\kappa})\vec{e}_2). \quad (24)$$

Другими словами, динамические уравнения, определяющие единичный трехгранник, модифицируются из (1) при наличии самосогласованного потенциала  $\vec{W}(x, t)$  как

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \tilde{G} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{G} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\omega}_3 & -\tilde{\omega}_2 \\ -\tilde{\omega}_3 & 0 & \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 & -\tilde{\omega}_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} + 2a^{-1} \begin{pmatrix} 0 & W_3 & -W_2 \\ -W_3 & 0 & W_1 - 2a\frac{W_3}{\kappa} \\ W_2 & -(W_1 - 2a\frac{W_3}{\kappa}) & 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= \omega_1 + 2a^{-1}(W_1 - 2a\frac{W_3}{\kappa}), \\ \tilde{\omega}_2 &= \omega_2 + 2a^{-1}W_2, \\ \tilde{\omega}_3 &= \omega_3 + 2a^{-1}W_3, \end{aligned} \quad (27)$$

где кривизна  $\kappa$  и кручение  $\tau$  даются снова выражениями, соответственно

$$\kappa = (\vec{e}_{1x} \cdot \vec{e}_{1x})^{\frac{1}{2}}, \quad \tau = \kappa^{-2} \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_{1x} \wedge \vec{e}_{1xx}). \quad (28)$$

Тогда ассоциирующие условия совместимости приводят к эволюционным уравнениям

$$\kappa_t = (\omega_{3x} + \tau\omega_2) + 2a^{-1}(W_{3x} + \tau W_2), \quad (29)$$

$$\tau_t = (\omega_{1x} - \kappa\omega_2) + 2a^{-1} \left[ W_{1x} - 2a \left( \frac{W_3}{\kappa} \right)_x - \kappa W_2 \right], \quad (30)$$

и условие согласованности принимает вид

$$\omega_{2x} + 2a^{-1}W_{2x} = \tau(\omega_3 + 2a^{-1}W_3) - \kappa \left[ \omega_1 + 2a^{-1}(W_1 - 2a \frac{W_3}{\kappa}) \right]. \quad (31)$$

Теперь, используя определяющие уравнения (18) - (20) для векторного потенциала  $\vec{W}$  в правых частях (29) - (31), получим модифицированный вид указанных уравнений как

$$\kappa_t = (\omega_{3x} + \tau\omega_2) - 4W_2, \quad (32)$$

$$\tau_t = \omega_{1x} - \kappa\omega_2 - 4 \left( \frac{W_3}{\kappa} \right)_x, \quad (33)$$

в то же время, когда условие согласованности остается неизменным, как и раньше:

$$\omega_{2x} = \tau\omega_3 - \kappa\omega_1. \quad (34)$$

Эти три уравнения должны быть дополнены определяющими уравнениями для векторного потенциала  $\vec{W} = (W_1, W_2, W_3)$ , заданного уравнениями (18) - (20). Таким образом, уравнения (32) - (34) вместе с (18) - (20) составляют динамические уравнения, определяющие движение пространственных кривых в  $R^3$  при наличии самосогласованного векторного потенциала  $\vec{W}(x, t)$ .

Кроме того, интересно отметить, что вышеупомянутый формализм также можно отождествить с движением вихревой нити [13] при наличии векторного потенциала или движения гибкой струны [14] при таком потенциальном поле. Пусть  $\vec{r}(x, t)$  определяет нить или струну, указанную

$$\vec{r}_t = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3 + 2a^{-1} \vec{W}, \quad (35)$$

где  $\alpha(x, t), \beta(x, t), \gamma(x, t)$  - заданные функции от  $x$  и  $t$ . Тогда, взяв производную по  $x$  (35), мы можем отобразить ее на приведенные выше уравнения движущейся кривой (25), что приводит к полезным физическим ситуациям. Можно рассмотреть еще более общие потенциальные поля, чем (16), а именно

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \vec{W} \times [a_1(x, t)\vec{e}_1 + a_2(x, t)\vec{e}_2 + a_3(x, t)\vec{e}_3] \quad (36)$$

и аналогичным образом обобщить уравнение (21) как

$$\vec{e}_{1t} = \vec{\Omega} \times \vec{e}_1 + \vec{W} \times [b_1(x, t)\vec{e}_1 + b_2(x, t)\vec{e}_2 + b_3(x, t)\vec{e}_3] \quad (37)$$

и изучить последствия.

### Спиновые уравнения, движущиеся пространственные кривые и обобщенные НУШ

Ввиду упомянутой в п.2, естественную связь между движущейся пространственной кривой и одномерной изотропной спиновой цепью Гейзенберга в ее континуальном пределе, мы теперь хотим распространить эту связь на более общие ситуации при наличии самосогласованных векторных потенциалов. С этой целью теперь рассмотрим конкретные эволюционные уравнения спиновых векторов при наличии потенциалов и отождествляем их с движущимися пространственными кривыми, а затем выведем семейство эквивалентных обобщенных НУШ с использованием формализма, представленного в предыдущем пункте. Для этого, мы сопоставляем единичный вектор спина, определяющий спиновые уравнения с единичным касательным вектором трехгранника, связанного с движущимися пространственными кривыми, что позволяет сделать соответствующее отображение.

**Основное киральное уравнение.** Рассмотрим динамическое уравнение для главного кирального поля  $\vec{S}(x, t)$

$$\vec{S}_t + \frac{2}{a}\vec{S} \wedge \vec{W} = 0, \quad (38)$$

$$\vec{W}_x + 2a\vec{S} \wedge \vec{W} = 0, \quad (39)$$

где  $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$ ,  $\vec{S}^2 = 1$ ,  $\vec{W} = (W_1, W_2, W_3)$ .

Вводя идентификацию

$$\vec{e}_1 \equiv \vec{S}, \quad \vec{W} = W_1\vec{e}_1 + W_2\vec{e}_2 + W_3\vec{e}_3 \quad (40)$$

с пространственной кривой в  $R^3$ , ввиду обсуждений в п.2, находим

$$\tilde{\omega}_1 = -\frac{4}{\kappa}W_3 + \frac{2}{\omega}W_1, \quad (41)$$

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{2}{\omega}W_2, \quad (42)$$

$$\tilde{\omega}_3 = \frac{2}{\omega}W_3, \quad (43)$$

где  $\vec{W}$  удовлетворяет (18)-(20). Соответственно эволюционное уравнение для пространственной кривой дается в терминах кривизны  $\kappa$  и кручения  $\tau$  как

$$\kappa_t + 4W_2 = 0, \quad (44)$$

$$\tau_t + 4\left(\frac{W_3}{\kappa}\right)_x = 0, \quad (45)$$

$$W_{1x} - kW_2 = 0, \quad (46)$$

$$W_{2x} + kW_1 - \tau W_3 - 2aW_3 = 0, \quad (47)$$

$$W_{3x} + \tau W_2 + 2aW_2 = 0. \quad (48)$$

Введем теперь следующие два комплексных преобразования и переопределенную вещественную функцию  $W_1$ :

$$q(x, t) = \frac{1}{2}\kappa(x, t)e^{-i\int_{-\infty}^x \tau(x', t)dx'}, \quad (49)$$

$$p = (iW_3 - W_2)e^{-i\int_{-\infty}^x \tau(x', t)dx'}, \quad (50)$$

$$\eta = W_1. \quad (51)$$

Таким образом, мы видим, что система (45) - (48) становится связанной НУШ как

$$iq_t - 2ip = 0, \quad (52)$$

$$p_x - 2iap - 2\eta q = 0, \quad (53)$$

$$\eta_x + q^*p + p^*q = 0. \quad (54)$$

Пары Лакса, связанные со спиновой системой (38) - (39) и НУШ (52) - (54), могут быть получены как предельная форма более общих систем, рассмотренных в п.4, которые доказывают интегрируемость как указанной выше спиновой системы, так и связанных НУШ.

**Гейзенберговская спиновая система при наличии самосогласованного потенциала: уравнение М-ХСІХ**

Рассмотрим обобщенную спиновую систему Гейзенберга в присутствии векторного потенциала, описываемого уравнением М-ХСІХ [11,12,15],

$$\vec{S}_t + \vec{S} \wedge \vec{S}_{xx} + \frac{2}{a}\vec{S} \wedge \vec{W} = 0, \quad (55)$$

$$\vec{W}_x + 2a\vec{S} \wedge \vec{W} = 0, \quad (56)$$

где  $\vec{S}$  и  $\vec{W}$  определены выше. Затем, как и раньше, с идентификацией

$$\vec{e}_1 \equiv \vec{S}, \quad \vec{W} = W_1\vec{e}_1 + W_2\vec{e}_2 + W_3\vec{e}_3, \quad (57)$$

получается

$$\widetilde{\omega}_1 = -\frac{\kappa_{xx}}{\kappa} + \tau^2 - \frac{4}{\kappa}W_3 + \frac{2}{a}W_1, \quad (58)$$

$$\widetilde{\omega}_2 = \kappa_x + \frac{2}{a}W_2, \quad (59)$$

$$\widetilde{\omega}_3 = \kappa\tau + \frac{2}{a}W_3 \quad (60)$$

наряду с (18) - (20). Следовательно, мы получаем эволюционное уравнение для кривизны и кручения как

$$\kappa_t - (\kappa\tau)_x - \kappa_x\tau + 4W_2 = 0, \quad (61)$$

$$\tau_t + \left(\frac{\kappa_{xx} + 4W_3}{\kappa}\right)_x - 2\tau\tau_x + \kappa\kappa_x = 0, \quad (62)$$

$$W_{1x} - \kappa W_2 = 0, \quad (63)$$

$$W_{2x} + \kappa W_1 - \tau W_3 - 2aW_3 = 0, \quad (64)$$

$$W_{3x} + \tau W_2 + 2aW_2 = 0. \quad (65)$$

Система (61) - (65) преобразуется в следующее НУШ посредством преобразований (49) - (51):

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2q - 2ip = 0, \quad (66)$$

$$p_x - 2iap - 2\eta q = 0, \quad (67)$$

$$\eta_x + q^*p + p^*q = 0, \quad (68)$$

которое является обобщенной версией уравнения НУШ. Оно также обозначается как нелинейное уравнение Шредингера-Максвелла-Блоха (ШМБ). Известно, что уравнение ШМБ описывает распространения оптического солитона в волокнах с резонансной системой [16,17]. Связанная пара Лакса для этой системы также указана в п.4.

**1.1. Обобщение третьего порядка гейзенберговской спиновой цепочки с самосогласованным потенциалом: уравнение М-ХСIV.** Рассмотрим следующее обобщение третьего порядка спинового уравнения Гейзенберга при наличии векторного потенциала, заданного уравнением Мырзакулова-ХСIV (М-ХСIV)

$$\vec{S}_t + \epsilon_1 \vec{S} \wedge \vec{S}_{xx} + \epsilon_2 [\vec{S}_{xxx} + 6(\beta \vec{S})_x] + \frac{2}{\omega} \vec{S} \wedge \vec{W} = 0, \quad (69)$$

$$\vec{W}_x + 2\omega \vec{S} \wedge \vec{W} = 0, \quad (70)$$

где  $\beta = \frac{1}{8}(\vec{S}_x \cdot \vec{S}_x)$ , а  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  - постоянные. Затем, следуя приведенному выше анализу, мы можем записывать

$$\widetilde{\omega}_1 = -\frac{\epsilon_1 \kappa_{xx} + 3\epsilon_2(\kappa_{xx}\tau + \kappa_x\tau_x) - 4W_3}{\kappa} + \epsilon_1\tau^2 - \epsilon_2(\tau_{xx} - \frac{1}{2}\kappa^2\tau - \tau^3) + \frac{2}{a}W_1, \quad (71)$$

$$\widetilde{\omega}_2 = \epsilon_1\kappa_x + \epsilon_2(2\kappa_x\tau + \kappa\tau_x) + \frac{2}{a}W_2, \quad (72)$$

$$\widetilde{\omega}_3 = \epsilon_1\kappa\tau - \epsilon_2(\kappa_{xx} - \kappa\tau^2 + \frac{1}{2}\kappa^3) + \frac{2}{a}W_3. \quad (73)$$

Следовательно, выводим эволюционные уравнения

$$\kappa_t - \epsilon_1[(\kappa\tau)_x + \kappa_x\tau] + \epsilon_2[\kappa_{xxx} - 3\kappa\tau\tau_x - 3\kappa_x\tau^2 + \frac{3}{2}\kappa^2\kappa_x] + 4W_2 = 0, \quad (74)$$

$$\tau_t + (\epsilon_1 F_1 + \epsilon_2 F_2 + 4\frac{W_3}{\kappa})_x = 0, \quad (75)$$

$$W_{1x} - \kappa W_2 = 0, \quad (76)$$

$$W_{2x} + \kappa W_1 - \tau W_3 - 2aW_3 = 0, \quad (77)$$

$$W_{3x} + \tau W_2 + 2aW_2 = 0, \quad (78)$$

где

$$F_1 = \frac{\kappa_{xx}}{\kappa} - \tau^2 + \frac{1}{2}\kappa^2, \quad F_2 = \frac{3\kappa_{xx}\tau + 3\kappa_x\tau_x}{\kappa} + \tau_{xx} - \tau^3 + \frac{3}{2}\kappa^2\tau. \quad (79)$$

Вышеупомянутая система, в свою очередь, может быть преобразована в уравнение Хирота-Максвелла-Блоха [16,17],

$$iq_t + \epsilon_1(q_{xx} + 2|q|^2q) + i\epsilon_2(q_{xxx} + 6|q|^2q_x) - 2ip = 0, \quad (80)$$

$$p_x - 2i\omega p - 2\eta q = 0, \quad (81)$$

$$\eta_x + q^*p + p^*q = 0, \quad (82)$$

используя преобразования (49) - (51).

Мы можем далее показать, что все приведенные выше спиновые уравнения и связанное с ними семейство НУШ интегрируемы. Для этой цели мы даем информацию о связанных парах Лакса в следующем пункте.

## 2. ПАРЫ ЛАКСА

Уравнение М-ХСIV (69) - (70) можно записать в матричной форме

$$iS_t + \frac{1}{2}\epsilon_1[S, S_{xx}] + i\epsilon_2[S_{xxx} + 6(\beta S)_x] + \frac{1}{a}[S, W] = 0, \quad (83)$$

$$iW_x + a[S, W] = 0, \quad (84)$$

где  $S = \vec{S} \cdot \vec{\sigma}$  и  $W = \vec{W} \cdot \vec{\sigma}$ ,  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  - матрицы Паули. Тогда пара Лакса, связанная с (83) - (84), может быть задана в обобщенной форме по сравнению с парой Лакса для простого УФГ (7), заданной Тахтаджаном [9],

$$\Phi_x = U\Phi, \quad (85)$$

$$\Phi_t = (2\lambda U + V)\Phi, \quad (86)$$

где

$$U = -i\lambda S, \quad (87)$$

$$V = \lambda^3 V_3 + \lambda^2 V_2 + \lambda V_1 + \frac{i}{\lambda + a} V_{-1} - \frac{i}{a} V_{-1}. \quad (88)$$

Здесь

$$V_3 = -4i\epsilon_2 S, \quad (89)$$

$$V_2 = -2i\epsilon_1 S + 2\epsilon_2 S S_x, \quad (90)$$

$$V_1 = \epsilon_1 S S_x + \epsilon_2 i(S_{xx} + 6\beta S), \quad (91)$$

$$V_{-1} = W = \begin{pmatrix} W_3 & W^+ \\ W^- & -W_3 \end{pmatrix}, \quad W^\pm = W_1 \pm iW_2. \quad (92)$$

Соответствующая калибровочная эквивалентная пара Лакса для уравнения Хирота-Максвелла-Блоха становится

$$\Psi_x = A\Psi, \quad (93)$$

$$\Psi_t = [-4i\epsilon_2\lambda^3\sigma_3 + B]\Psi, \quad (94)$$

где

$$A = -i\lambda\sigma_3 + A_0, \quad (95)$$

$$B = \lambda^2 B_2 + \lambda B_1 + B_0 + \frac{i}{\lambda + a} B_{-1}. \quad (96)$$

Здесь

$$B_2 = -2i\epsilon_1\sigma_3 + 4\epsilon_2A_0, \quad (97)$$

$$B_1 = 2i\epsilon_2|q|^2\sigma_3 + 2i\epsilon_2\sigma_3A_{0x} + 2\epsilon_1A_0, \quad (98)$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -q^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (99)$$

$$B_0 = (i\epsilon_1|q|^2 + \epsilon_2(q_x^*q - q^*q_x))\sigma_3 + B_{01}, \quad (100)$$

$$B_{01} = \begin{pmatrix} 0 & i\epsilon_1q_x - \epsilon_2q_{xx} - 2\epsilon_2q^*q^2 \\ i\epsilon_1q_x^* + \epsilon_2q_{xx}^* + 2\epsilon_2qq^{*2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (101)$$

$$B_{-1} = \begin{pmatrix} \eta & -p \\ -p^* & -\eta \end{pmatrix}. \quad (102)$$

Пары Лакса других случаев в п.3 могут быть получены путем принятия соответствующих ограничений, например,  $\epsilon_2 = 0$  и т.д. Существование пары Лакса подтверждает интегрируемость как спиновых систем, так и их обобщенных аналогов семейства НУШ.

### Интегрируемые поверхности, индуцированные спиновыми системами с самосогласованными потенциалами

В этом пункте, в качестве дальнейшего следствия геометрических аспектов, вкратце представлены основные моменты зависимости между геометрией поверхности и спиновыми системами в (1+1) измерениях с изученными здесь самосогласованными потенциалами. В качестве примера спиновых систем здесь рассматривается уравнение М-ХСІХ (55) - (56), которое является интегрируемым. Рассмотрим двумерную поверхность с радиус-вектором  $\vec{r}$ . Предположим теперь, что

$$\vec{r}_x \equiv \vec{S}, \quad (103)$$

тогда

$$\vec{r}_x^2 = 1. \quad (104)$$

Двумерная метрика имеет вид

$$ds^2 = dx^2 + 2\vec{r}_x \cdot \vec{r}_t dxdt + \vec{r}_t^2 dt^2. \quad (105)$$

В терминах  $\vec{r}$  уравнение М-ХСІХ (55) - (56) принимает вид

$$\vec{r}_t + \vec{r}_x \wedge \vec{r}_{xx} - \frac{1}{a^2} \vec{W} = 0, \quad (106)$$

$$\vec{W}_x + 2a\vec{r}_x \wedge \vec{W} = 0. \quad (107)$$

Это  $\vec{r}$  - форма уравнения М-ХСІХ. Для уравнения М-ХСІХ (55) - (56) имеем

$$\vec{r}_t \cdot \vec{r}_x = \frac{1}{a^2} \vec{r}_x \cdot \vec{W}, \quad (108)$$

$$\vec{r}_t^2 = \frac{C}{a^4} - \frac{2}{a^2} \vec{W} \cdot (\vec{r}_x \wedge \vec{r}_{xx}) + \vec{r}_{xx}^2, \quad (109)$$

где  $C = C(t) = \vec{W}^2$ . Итак, для уравнения М-ХСІХ индуцированная метрика двумерной поверхности задается формулой

$$ds^2 = dx^2 + \frac{2}{a^2} \vec{r}_x \cdot \vec{W} dxdt + \left[ \frac{C}{a^4} - \frac{2}{a^2} \vec{W} \cdot (\vec{r}_x \wedge \vec{r}_{xx}) + \vec{r}_{xx}^2 \right] dt^2. \quad (110)$$

Эта метрика определяет некоторые двумерные поверхности в  $R^3$ . Имея метрику, мы можем вычислить все «ингредиенты» поверхности. В терминах  $\kappa$  (кривизны),  $\tau$  (кручения) и функций  $W_j$  эта метрика может быть переписана как

$$ds^2 = dx^2 + \frac{2}{a^2} W_1 dxdt + \left[ \frac{C}{a^4} - \frac{2}{a^2} \kappa W_3 + \kappa^2 \right] dt^2. \quad (111)$$

Аналогичная интерпретация может быть дана и для других примеров.

**Заклучение.** В настоящей работе показано, что нелинейные эволюционные уравнения, описывающие движение пространственных кривых в  $R^3$  можно вывести при наличии самосогласованных полей внешнего векторного потенциала. Тогда, перейдя на подходящие спиновые системы, можно выделить общий класс интегрируемых семейств нелинейных уравнений Шредингера с дополнительными потенциальными полями. Основными примерами были эволюционные уравнения главного кирального поля, спиновое уравнение Гейзенберга и обобщенная цепочка гейзенберговского спина, все при наличии внешних потенциалов. Применяя подходящие комплексные преобразования, спиновые цепочки также сопоставили по интегрируемой обобщенной системе нелинейных уравнений Шредингера, включая уравнение Хирота-Максвелла-Блоха. Интегрируемость этих систем также установлена путем выведения калибровочно связанных пар Лакса. Наконец, показано, что можно идентифицировать эквивалентные интегрируемые поверхности, индуцированные спиновыми системами с самосогласованными потенциалами. Как указано в тексте, эти исследования могут быть расширены, чтобы включить еще более общий класс потенциалов, а также рассмотреть движение поверхностей.

### Список литературы

- 1 Lamb G.L. Solitons and the Motion of Helical Curves // *Physical Review Letters* –1976. –Т.37. №235.
- 2 Lund F., Regge T. Unified approach to strings and vortices with soliton solutions // *Physical Review D* 14 –1976. –С.1524.
- 3 Lakshmanan M. On the geometrical interpretation of solitons // *Physical Letters A* 64 –1978. –С.354.
- 4 Sasaki R. Soliton equations and pseudospherical surfaces // *Nuclear Physics B* –1979. –Т.154. С.343.
- 5 Doliwa A., Santini P.M. An elementary geometric characterization of the integrable motions of a curve // *Physical Letters A* –1994. –Т.185. С.373.
- 6 Lakshmanan M., Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Danlybaeva A. K. Motion of curves and ... evolution equations in (2+1) dimensions // *Journal of Mathematical Physics* –1998. –Т.39. –С. 3765.
- 7 Lakshmanan M., Ruijgrok Th.W., Thompson C.J. On the dynamics of a continuum spin system // *Physica A* 84 –1976. –С. 877.
- 8 Lakshmanan M. The fascinating world of the Landau–Lifshitz–Gilbert equation: an overview // *Philosophical Transactions of the Royal Society A* –2011. –Т.369. –С.1280.
- 9 Takhtajan L.A. Integration of the continuous Heisenberg spin chain through the inverse scattering method // *Physics Letters A* –1977. –Т.64 С.235.
- 10 Zakharov V.E., Takhtajan L.A. Equivalence of the nonlinear Schrodinger equation and the equation of a Heisenberg ferromagnet // *Theoretical and Mathematical Physics* –1979. –Т.38. №1.
- 11 Myrzakulov R., Rahimov F.K., Myrzakul K., Serikbaev N.S. On the geometry of stationary Heisenberg ferromagnets in *Non-linear Waves: Classical and Quantum Aspects*. – Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands. –2004. С. 543-549.
- 12 Myrzakulov R., Serikbaev N.S., Myrzakul K., Rahimov F.K. // *Journal of NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry*. –2004. –153. №535.
- 13 Hasimoto H. A soliton on a vortex filament // *Journal of Fluid Mechanics* –1972. –Т.51. С. 477.
- 14 Lakshmanan M., Tamizhmani K.M. Nonlinear Dynamics of Moving Curves and Surfaces // *Applied Scientific Research* –1981. –Т.37 –С. 127.
- 15 Yersultanova Z.S., Zhassybayeva M., Nugmanova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. Integrable motion of curves in self-consistent potentials: Relation to spin systems and soliton equations // *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* –2015. –Т.13. №1.
- 16 Porsezian K., Nakkeeran K. Optical Soliton Propagation in a Coupled System of the Nonlinear Schrödinger Equation and the Maxwell-Bloch Equations // *Journal of Modern Optics* –1995. –Т.42. –С. 1953.
- 17 Chuanzhong Li, Jingsong He, Porsezian K. Rogue waves of the Hirota and the Maxwell-Bloch equations// *Physical Review E* –2013. –Т.87. №012913.

Нугманова Г.Н.

*Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетіні, Астана, Қазақстан*

**Келісімді потенциалдары бар (1+1) өлшемдегі интегралданатын спиндік жүйелер**

**Аннотация:**  $R^3$  кеңістігінде қисықтар мен беттердің қозғалысы жиі интегралданатын сызықты емес эволюциялық теңдеулерге алып келеді. Олар сондай-ақ геометриялық және симметриялы эквивалентті теңдеулер арқылы біріктірілген солитон жүйелерінде континуальды шегі мен спиндік тізбектердің динамикасымен тығыз байланысты. Осы мақалада қосымша қисықтардың осымша векторлық потенциалдардың қатысуымен дамып келе жатқан жалпы жағдайдың өзін-өзі үйлесімді потенциалы бар таралған спин жүйелері пайда болуы мүмкін екендігі көрсетілген. Негізгі эволюция қисық теңдеулерінің жалпы көрінісі алынды және жалпыланған ан спин тізбектері мен солитон теңдеулерінің



нақты мысалдары келтірілген. Олардың ішінде Хирот-Максвелл-Блох теңдеуін қоса алғанда, өзіндік дәйекті өрістік потенциал болған жағдайда негізгі сызықтық модельді және түрлі Мырзақұловтың спин теңдеуін  $(1 + 1)$  және олардың жалпыланған сызықты емес Шредингер теңдеулерінің (СШТ) топтамасы геометриялық эквиваленттері Блох теңдеуі. Тиісті габаритті эквивалент Лакс жұптары да олардың интегралдануын растау үшін ұсынылған

**Түйін сөздер:** спиндік жүйе, геометриялық эквиваленттілік, калибрлі түрлендіру, Лакс көрінісі, қисықтар мен беттердің қозғалысы.

G.N. Nugmanova

*L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan*

### Integrable spin systems with self-consistent potentials in $(1+1)$ dimensions

**Abstract:** The motion of curves and surfaces in  $R^3$  leads to nonlinear evolution equations, which are often integrable. They are also closely related to the dynamics of spin chains in the continuum limit and integrable soliton systems through geometric and gauge symmetric equivalences. In this paper it is shown that a more general situation in which the curves evolve in the presence of additional self-consistent vector potentials can lead to interesting generalized spin systems with self-consistent potentials. A general view of the main evolution equations of curves is obtained and concrete examples of generalized spin chains and soliton equations are given. These include the main chiral model and various Myrzakulov spin equations in  $(1 + 1)$  dimensions and their geometric equivalents from the family of generalized nonlinear Schrödinger equations (NSE) in the presence of a self-consistent field potential, including the Hiroth-Maxwell-Bloch equation. The corresponding gauge equivalent Lax pairs are also presented to confirm their integrability

**Keywords:** spin system, geometrical equivalence, gauge transformation, Lax representation, motion of curves and surfaces.

### References

- 1 Lamb G.L. Solitons and the Motion of Helical Curves, *Physical Review Letters*, **37** (235), (1976).
- 2 Lund F., Regge T. Unified approach to strings and vortices with soliton solutions, *Physical Review D*, **14** 1524 (1976).
- 3 Lakshmanan M. On the geometrical interpretation of solitons, *Physical Letters A*, **64** 354, (1978).
- 4 Sasaki R. Soliton equations and pseudospherical surfaces, *Nuclear Physics B*, **154** 343, (1979).
- 5 Doliwa A., Santini P.M. An elementary geometric characterization of the integrable motions of a curve, *Physical Letters A*, **185** 373, (1994).
- 6 Lakshmanan M., Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Danlybaeva A. K. Motion of curves and ... evolution equations in  $(2+1)$  dimensions, *Journal of Mathematical Physics*, **39**, 3765, (1998).
- 7 Lakshmanan M., Ruijgrok Th.W., Thompson C.J. On the dynamics of a continuum spin system, *Physica A*, **84** 877, (1976).
- 8 Lakshmanan M. The fascinating world of the Landau–Lifshitz–Gilbert equation: an overview, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, **369** 1280, (2011).
- 9 Takhtajan L.A. Integration of the continuous Heisenberg spin chain through the inverse scattering method, *Physics Letters A*, **64** 235, (1977).
- 10 Zakharov V.E., Takhtajan L.A. Equivalence of the nonlinear Schrödinger equation and the equation of a Heisenberg ferromagnet, *Theoretical and Mathematical Physics*, **38** (1), (1979).
- 11 Myrzakulov R., Rahimov F.K., Myrzakul K., Serikbaev N.S. On the geometry of stationary Heisenberg ferromagnets in Non-linear Waves: Classical and Quantum Aspects, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 543-549, (2004).
- 12 Myrzakulov R., Serikbaev N.S., Myrzakul K., Rahimov F.K., *Journal of NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry*, **535** 153, (2004).
- 13 Hasimoto H. A soliton on a vortex filament, *Journal of Fluid Mechanics*, **51** 477, (1972).
- 14 Lakshmanan M., Tamizhmani K.M. Nonlinear Dynamics of Moving Curves and Surfaces, *Applied Scientific Research*, **37** 127, (1981).
- 15 Yersultanova Z.S., Zhassybayeva M., Nugmanova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. Integrable motion of curves in self-consistent potentials: Relation to spin systems and soliton equations, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, **13** (2015).
- 16 Porsezian K., Nakkeeran K. Optical Soliton Propagation in a Coupled System of the Nonlinear Schrödinger Equation and the Maxwell-Bloch Equations, *Journal of Modern Optics*, **42** (1995).
- 17 Chuanzhong Li, Jingsong He, Porsezian K. Rogue waves of the Hirota and the Maxwell-Bloch equations, *Physical Review E*, **87** 012913, (2013).

#### Сведения об авторах:

*Нугманова Г.Н.* - Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, ул. Мунайтпасова 13, Астана, Казахстан.

*Nugmanova G.N.* - L.N. Gumilyov Eurasian National University, Munaitpasov str. 13, Astana, Kazakhstan.

*Поступила в редакцию 15.09.2018*

**«Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Хабаршысы. Физика. Астрономия сериясы» журналында мақала жариялау ережесі**

*Журнал редакциясы авторларға осы нұсқаулықпен толық танысып, журналға мақала әзірлеу мен дайын мақаланы журналға жіберу кезінде басшылыққа алуды ұсынады. Бұл нұсқаулық талаптарының орындалмауы сіздің мақалаңыздың жариялануын кідіртеді.*

**1. Журнал мақсаты.** Физика мен астрономия салаларының теориялық және эксперименталды зерттелулері бойынша мұқият тексеруден өткен ғылыми құндылығы бар мақалалар жариялау.

**2.** Баспаға (барлық жариялаушы авторлардың қол қойылған қағаз нұсқасы және электронды нұсқа) журналдың түпнұсқалы стильдік файлының міндетті қолданысымен LaTeX баспа жүйесінде дайындалған Tex- пен Pdf-файлындағы жұмыстар ұсынылады. Стильдік файлды *bulphysast.enu.kz* журнал сайтынан жүктеп алуға болады. Сонымен қатар, автор(лар) ілеспе хат ұсынуы керек.

**3. Автордың қолжазбаны редакцияға жіберуі мақаланың Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысында басуға келісін, шетел тіліне аударылып қайта басылуына келісін білдіреді. Автор мақаланы редакцияға жіберу арқылы автор туралы мәліметтің дұрыстығына, мақала көшірілмегендігіне (плагиаттың жоқтығына) және басқа да заңсыз көшірмелердің жоқтығына кепілдеме береді.**

**4.** Мақаланың көлемі 18 беттен аспауға тиіс (6 беттен бастап).

**ГАМРК** <http://grnti.ru/>

**Автор(лар)дың аты-жөні**

**Мекеменің толық атауы, қаласы, мемлекеті** (егер авторлар әртүрлі мекемеде жұмыс жасайтын болса, онда әр автор мен оның жұмыс мекемесі қасында бірдей белгі қойылу керек)

**Автор(лар)дың E-mail-ы**

**Мақала атауы**

**Аннотация** (100-200 сөз; күрделі формулаларсызсыз, мақаланың атауын мейлінше қайталамауы қажет; әдебиеттерге сілтемелер болмауы қажет; мақаланың құрылысын (кіріспе мақаланың мақсаты/ міндеттері /қарастырылып отырған сұрақтың тарихы /зерттеу /әдістері нәтижелер/талқылау, қорытынды) сақтай отырып, мақаланың қысқаша мазмұны берілуі қажет).

**Түйін сөздер** (6-8 сөз не сөз тіркесі. Түйін сөздер мақала мазмұнын көрсетіп, мейлінше мақала атауы мен аннотациядағы сөздерді қайталамай, мақала мазмұнындағы сөздерді қолдану қажет. Сонымен қатар, ақпараттық-ізвестіру жүйелерінде мақаланы жеңіл табуға мүмкіндік беретін ғылым салаларының терминдерін қолдану қажет).

**Негізгі мәтін** мақаланың мақсаты/ міндеттері/ қарастырылып отырған сұрақтың тарихы, зерттеу әдістері, нәтижелер/талқылау, қорытынды бөлімдерін қамтуы қажет.

**5. Таблица, суреттер** – Жұмыстың мәтінінде кездесетін таблицалар мәтіннің ішінде жеке нөмірленіп, мәтін көлемінде сілтемелер түрінде көрсетілуі керек. Суреттер мен графиктер PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX форматындағы стандарттарға сай болуы керек. Нүктелік суреттер кеңейтілімі 600 dpi кем болмауы қажет. Суреттердің барлығы да айқын әрі нақты болуы керек.

Мақаладағы **формулалар** тек мәтінде оларға сілтеме берілсе ғана нөмірленеді.

Жалпы қолданыста бар **аббревиатуралар** мен **қысқартулардан** басқалары міндетті түрде алғаш қолданғанда түсіндірілуі берілуі қажет. **Қаржылай көмек туралы** ақпарат бірінші бетте көрсетіледі.

**6.** Жұмыста қолданылған әдебиеттер тек жұмыста сілтеме жасалған түпнұсқалық көрсеткішке сай (сілтеме беру тәртібінде немесе ағылшын әліпбиі тәртібі негізінде толтырылады) болуы керек. Баспадан шықпаған жұмыстарға сілтеме жасауға түйым салынады.

Сілтемені беруде автор қолданған әдебиеттің бетінің нөмірін көрсетпей, келесі нұсқаға сүйеніңіз дұрыс: тараудың номері, бөлімнің номері, тармақтың номері, теораманың (лемма, ескерту, формуланың және т.б.) номері көрсетіледі. Мысалы: қараңыз [3; § 7, лемма 6]», «...қараңыз [2; 5 теорамандағы ескерту]». Бұл талап орындалмаған жағдайда мақаланы ағылшын тіліне аударғанда сілтемелерде қателіктер туындауы мүмкін.

**Қолданылаған әдебиеттер тізімін рәсімдеу мысалдары**

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. –М: Физматлит, –1994, –376 стр. – **кітап**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики –2014. –Т.54. № 7. –С. 1059-1077. - **мақала**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. – **конференция еңбектері**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. –Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. –С.7. – **газеттік мақала**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронды журнал**

**7.** Әдебиеттер тізімінен соң автор өзінің библиографиялық мәліметтерін орыс және ағылшын тілінде (егер мақала қазақ тілінде орындалса), қазақ және ағылшын тілінде (егер мақала орыс тілінде орындалса), орыс және қазақ тілінде (егер мақала ағылшын тілінде орындалса) жазу қажет. Соңынан транслиттік аударма мен ағылшын тілінде берілген әдебиеттер тізімінен соң әр автордың жеке мәліметтері (қазақ, орыс, ағылшын тілдерінде – ғылыми атағы, қызметтік мекенжайы, телефоны, e-mail-ы) беріледі.

**8.** Редакцияға түскен мақала жабық (анонимді) тексеруге жіберіледі. Барлық рецензиялар авторларға жіберіледі. Автор (рецензент мақаланы түзетуге ұсыныс берген жағдайда) үш күн аралығында қайта қарап, қолжазбаның түзетілген нұсқасын редакцияға қайта жіберуі керек. Рецензент жарамсыз деп таныған мақала қайтара қарастырылмайды. Мақаланың түзетілген нұсқасы мен автордың рецензентке жауабы редакцияға жіберіледі.

**9. Төлемақы.** Басылымға рұқсат етілген мақала авторларына төлем жасау туралы ескертіледі. Төлем көлемі 2018 жылы 4500 тенге – ЕҰУ қызметкерлері үшін және 5500 тенге басқа ұйым қызметкерлеріне.

1) РГП ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева МОН РК

АО "Банк ЦентрКредит"

БИК Банка: КСЖВКЗКХ

ИИК: KZ978562203105747338 (KZT)

Кнп 861

Кбе 16

"Мақала үшін (автордың аты-жөні)"

2) РГП ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева МОН РК

АО "Bank RBK"

БИК Банка: KINCKZKA

ИИК: KZ498210439858161073 (KZT)

"Мақала үшін (автордың аты-жөні)"

3) РГП ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева МОН РК

АО "Forte"

БИК Банка: IRTYKZKA

ИИК: KZ599650000040502847 (KZT)

"Мақала үшін (автордың аты-жөні)"

**Provision on articles submitted to the journal "Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.  
Physics. Astronomy series"**

*The journal editorial board asks the authors to read the rules and adhere to them when preparing the articles, sent to the journal. Deviation from the established rules delays the publication of the article.*

**1. Purpose of the journal.** Publication of carefully selected original scientific.

2. The scientific publication office accepts the article (in electronic and printed, signed by the author) in Tex- and Pdf-files, prepared in the LaTeX publishing system with mandatory use of the original style log file. The style log file can be downloaded from the journal website *bulphysast.enu.kz*. And you also need to provide the cover letter of the author(s).

Language of publications: Kazakh, Russian, English.

**3. Submission of articles to the scientific publication office means the authors' consent to the right of the Publisher, L.N. Gumilyov Eurasian National University, to publish articles in the journal and the re-publication of it in any foreign language. Submitting the text of the work for publication in the journal, the author guarantees the correctness of all information about himself, the lack of plagiarism and other forms of improper borrowing in the article, the proper formulation of all borrowings of text, tables, diagrams, illustrations.**

4. The volume of the article should not exceed 18 pages (from 6 pages).

**5. Structure** of the article

GRNTI <http://grnti.ru/>

*Initials and Surname of the author (s)*

*Full name of the organization, city, country* (if the authors work in different organizations, you need to put the same icon next to the name of the author and the corresponding organization)

*Author's e-mail (s)*

*Article title*

**Abstract** (100-200 words, it should not contain a big formulas, the article title should not repeat in the content, it should not contain bibliographic references, it should reflect the summary of the article, preserving the structure of the article - introduction/ problem statement/ goals/ history, research methods, results /discussion, conclusion).

**Key words** (6-8 words/word combination). Keywords should reflect the main content of the article, use terms from the article, as well as terms that define the subject area and include other important concepts that make it easier and more convenient to find the article using the information retrieval system).

**The main text of the article** should contain an introduction/ problem statement/ goals/ history, research methods, results / discussion, conclusion. Tables, figures should be placed after the mention. Each illustration should be followed by an inscription. Figures should be clear, clean, not scanned.

Tables are included directly in the text of the article; it must be numbered and accompanied by a reference to them in the text of the article. Figures, graphics should be presented in one of the standard formats: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Bitmaps should be presented with a resolution of 600 dpi. All details must be clearly shown in the figures.

In the article, only those **formulas** are numbered, to which the text has references.

All **abbreviations**, with the exception of those known to be generally known, must be deciphered when first used in the text. Information on **the financial** support of the article is indicated on the first page in the form of a footnote.

**6.** The list of literature should contain only those sources (numbered in the order of quoting or in the order of the English alphabet), which are referenced in the text of the article. References to unpublished issues, the results of which are used in evidence, are not allowed. Authors are recommended to exclude the reference to pages when referring to the links and guided by the following template: chapter number, section number, paragraph number, theorem number (lemmas, statements, remarks to the theorem, etc.), number of the formula. For example, "... see [3, § 7, Lemma 6]"; "... see [2], a remark to Theorem 5". Otherwise, incorrect references may appear when preparing an English version of the article.

### Template

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр.-**book**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **journal article**

3 Жубанышева А.Ж., Абикинова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - - **Conferences proceedings**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. **newspaper articles**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **Internet resources**

**7.** At the end of the article, after the list of references, it is necessary to indicate bibliographic data in Russian and English (if the article is in Kazakh), in Kazakh and English (if the article is in Russian) and in Russian and Kazakh languages (if the article is English language). Then a combination of the English-language and transliterated parts of the references list and information about authors (scientific degree, office address, telephone, e-mail - in Kazakh, Russian and English) is given.

**8. Work with electronic proofreading.** Articles received by the Department of Scientific Publications (editorial office) are sent to anonymous review. All reviews of the article are sent to the author. The authors must send the proof of the article within three days. Articles that receive a negative review for a second review are not accepted. Corrected versions of articles and the author's response to the reviewer are sent to the editorial office. Articles that have positive reviews are submitted to the editorial boards of the journal for discussion and approval for publication.

**Periodicity of the journal:** 4 times a year.

**9. Payment.** Authors who have received a positive conclusion for publication should make payment on the following requisites (for ENU employees - 4,500 tenge, for outside organizations - 5,500 tenge):

Реквизиты:

1) РГП ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева МОН РК

АО "Банк ЦентрКредит"

БИК Банка: КСJBKZKX

ИИК: KZ978562203105747338 (KZT)

Кнп 861

Кбе 16

"За публикацию в Вестник ЕНУ ФИО автора"

2) РГП ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева МОН РК

АО "Bank RBK"

БИК Банка: KINCKZKA

ИИК: KZ498210439858161073 (KZT)

"За публикацию в Вестник ЕНУ ФИО автора"

3) РГП ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева МОН РК

АО "Forte"

БИК Банка: IRTYKZKA

ИИК: KZ599650000040502847 (KZT)

"За публикацию в Вестник ЕНУ ФИО автора"

**Положение о рукописях, представляемых в журнал «Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия: Физика. Астрономия»**

Редакция журнала просит авторов ознакомиться с правилами и придерживаться их при подготовке работ, направляемых в журнал. Отклонение от установленных правил задерживает публикацию статьи.

**1. Цель журнала.** Публикация тщательно отобранных оригинальных научных работ по актуальным проблемам теоретических и экспериментальных исследований в области физики и астрономии.

**2.** В редакцию (в бумажном виде, подписанном всеми авторами и в электронном виде) представляются Tex- и Pdf-файлы работы, подготовленные в издательской системе LaTeX, с обязательным использованием оригинального стилевого файла журнала. Стилиевой файл можно скачать со сайта журнала *bulphysast.enu.kz*. Автору (авторам) необходимо предоставить сопроводительное письмо.

**Язык публикаций:** казахский, русский, английский.

**3. Отправление статей в редакцию означает согласие авторов на право Издателя, Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, издания статей в журнале и переиздания их на любом иностранном языке. Представляя текст работы для публикации в журнале, автор гарантирует правильность всех сведений о себе, отсутствие плагиата и других форм неправомерного заимствования в рукописи, надлежащее оформление всех заимствований текста, таблиц, схем, иллюстраций.**

**4.** Объем статьи не должен превышать 18 страниц (от 6 страниц).

**5. Схема построения статьи**

**ГРНТИ** <http://grnti.ru/>

**Инициалы и фамилия автора(ов)**

**Полное наименование организации, город, страна** (если авторы работают в разных организациях, необходимо поставить одинаковый значок около фамилии автора и соответствующей организации)

**E-mail** автора(ов)

**Название статьи**

**Аннотация** (100-200 слов; не должна содержать громоздкие формулы, по содержанию повторять название статьи; не должна содержать библиографические ссылки; должна отражать краткое содержание статьи, сохраняя структуру статьи – введение/ постановка задачи/ цели/ история, методы исследования, результаты/обсуждение, заключение/выводы).

**Ключевые слова** (6-8 слов/словосочетаний). Ключевые слова должны отражать основное содержание статьи, использовать термины из текста статьи, а также термины, определяющие предметную область и включающие другие важные понятия, позволяющие облегчить и расширить возможности нахождения статьи средствами информационно-поисковой системы).

**Основной текст статьи** должен содержать введение/ постановку задачи/ цели/ историю, методы исследования, результаты/обсуждение, заключение/выводы.

Таблицы включаются непосредственно в текст работы, они должны быть пронумерованы и сопровождаться ссылкой на них в тексте работы. Рисунки, графики должны быть представлены в одном из стандартных форматов: PS, PDF, TIFF, GIF, JPEG, BMP, PCX. Точечные рисунки необходимо выполнять с разрешением 600 dpi. На рисунках должны быть ясно переданы все детали.

В статье нумеруются лишь те **формулы**, на которые по тексту есть ссылки.

Все **аббревиатуры и сокращения**, за исключением заведомо общеизвестных, должны быть расшифрованы при первом употреблении в тексте.

Сведения о **финансовой поддержке** работы указываются на первой странице в виде сноски.

**6.** Список литературы должен содержать только те источники (пронумерованные в порядке цитирования или в порядке английского алфавита), на которые имеются ссылки в тексте работы. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются.

Авторам рекомендуется при оформлении ссылок исключить упоминание страниц и руководствоваться следующим шаблоном: номер главы, номер параграфа, номер пункта, номер теоремы (леммы, утверждения, замечания к теореме и т.п.), номер формулы. Например, "... , см. [3; § 7, лемма 6]"; "... , см. [2; замечание к теореме 5]". В противном случае при подготовке англоязычной версии статьи могут возникнуть неверные ссылки.

**Примеры оформления списка литературы**

1 Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. -М: Физматлит, -1994, -376 стр. - **книга**

2 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики -2014. -Т.54. № 7. -С. 1059-1077. - **статья**

3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. - Москва, 2015. -С.141-142. - **труды конференции**

4 Нуртазина К. Рыцарь математики и информатики. -Астана: Каз.правда, 2017. 19 апреля. -С.7. - **газетная статья**

5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия -2017. -Т.14. -С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. - URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**

**7.** После списка литературы, необходимо указать библиографические данные на русском и английском языках (если статья оформлена на казахском языке), на казахском и английском языках (если статья оформлена на русском языке) и на русском и казахском языках (если статья оформлена на английском языке). Затем приводится комбинация англоязычной и транслитерированной частей списка литературы и сведения по каждому из авторов (научное звание, служебный адрес, телефон, e-mail - на казахском, русском и английском языках).

**8. Работа с электронной корректурой.** Статьи, поступившие в Отдел научных изданий (редакция), отправляются на анонимное рецензирование. Все рецензии по статьям отправляются автору. Авторам в течение трех дней

необходимо отправить корректуру статьи. Статьи, получившие отрицательную рецензию, к повторному рассмотрению не принимаются. Исправленные варианты статей и ответ автора рецензенту присылаются в редакцию. Статьи, имеющие положительные рецензии, представляются редколлегии журнала для обсуждения и утверждения для публикации.

**Периодичность журнала:** 4 раза в год.

**9.Оплата.** Авторам, получившим положительное заключение к опубликованию, необходимо произвести оплату по следующим реквизитам (для сотрудников ЕНУ – 4500 тенге, для сторонних организаций – 5500 тенге):

Реквизиты:

1) РГП ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева МОН РК

АО "Банк ЦентрКредит"

БИК Банка: КСЖВКЗКХ

ИИК: KZ978562203105747338 (KZT)

Кнп 861

Кбе 16

"За публикацию в Вестник ЕНУ ФИО автора"

2) РГП ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева МОН РК

АО "Bank RBK"

БИК Банка: KINCKZKA

ИИК: KZ498210439858161073 (KZT)

"За публикацию в Вестник ЕНУ ФИО автора"

3) РГП ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева МОН РК

АО "Forte"

БИК Банка: IRTYKZKA

ИИК: KZ599650000040502847 (KZT)

"За публикацию в Вестник ЕНУ ФИО автора"

## Мақаланы рәсімдеу үлгісі

МРНТИ 27.25.19

**А.Ж. Жубанышева<sup>1</sup>, Н. Темиргалиев<sup>2</sup>, А.Б. Утесов<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> *Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан*

<sup>2</sup> *Актюбинский региональный государственный университет имени К. Жубанова, Актюбе, Казахстан*

(Email: <sup>1</sup> [axaulezh@mail.ru](mailto:axaulezh@mail.ru), <sup>2</sup> [ntmath10@mail.ru](mailto:ntmath10@mail.ru), <sup>3</sup> [adilzhan\\_71@mail.ru](mailto:adilzhan_71@mail.ru))

### **Численное дифференцирование функций в контексте Компьютерного (вычислительного) перечника**

**Аннотация:** В рамках компьютерного (вычислительного) перечника полностью решена задача приближенного дифференцирования функций, принадлежащих классам Соболева по неточной информации, полученной от произвольного конечного множества тригонометрических коэффициентов Фурье-Лебега дифференцируемой функции... [100-200 слов].

**Ключевые слова** приближенное дифференцирование, восстановление по неточной информации, предельная погрешность, компьютерный (вычислительный) перечник. [6-8 слов/словосочетаний].

### **Введение**

Текст введения...

Авторам не следует использовать нестандартные пакеты LaTeX (используйте их лишь в случае крайней необходимости)

### **Заголовок секции**

#### **1.1 Заголовок подсекции**

Окружения.

**Теорема 1.** ...

**Лемма 1.** ...

**Предложение 1.** ...

**Определение 1.** ...

**Следствие 1.** ...

**Замечание 1.** ...

**Теорема 2** (Темиргалиев Н. [2]). *Текст теоремы.*

**Доказательство.** Текст доказательства.

## 2. Формулы, таблицы, рисунки

$$\delta_N(\varepsilon_N; D_N)_Y \equiv \delta_N(\varepsilon_N; T; F; D_N)_Y \equiv \inf_{(l^{(N)}, \varphi_N) \in D_N} \delta_N\left(\varepsilon_N; \left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right)_Y, \quad (17)$$

где  $\delta_N(\varepsilon_N; (l^{(N)}, \varphi_N))_Y \equiv \delta_N(\varepsilon_N; T; F; (l^{(N)}, \varphi_N))_Y \equiv$

$$\equiv \sup_{f \in F} \left\| Tf(\cdot) - \varphi_N \left( l_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)} \varepsilon_N^{(1)}, \dots, l_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)} \varepsilon_N^{(N)}; \cdot \right) \right\|_Y.$$

$$|\gamma_N^{(\tau)}| \leq 1 (\tau=1, \dots, N)$$

Таблицы, рисунки необходимо располагать после упоминания, каждой иллюстрации должна следовать надпись.

Таблица 1 – Название таблицы

Простые	Не простые
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29	4, 6, 8, 9, 10, 12, 14



Рисунок 1 – Название рисунка

## 3. Ссылки и библиография

Для ссылок на утверждения, формулы и т. п. можно использовать метки. Например, теорема 2, Формула (17)

Для руководства по ЛАТЭХ и в качестве примера оформления ссылок, см., например, *Львовский С.М.* Набор и верстка в пакете ЛАТЭХ. Москва: Космосинформ, 1994.

Список литературы оформляется следующим образом.

### Список литературы

- 1 Локуциевский О.М., Гавриков М.Б. Начала численного анализа. –М.: ТОО "Янус", 1995. –581 с. - **книга**
- 2 Темиргалиев Н. Компьютерный (вычислительный) поперечник как синтез известного и нового в численном анализе // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева –2014. –Т.4. №101. –С. 16-33. doi: ... (при наличии) - **статья**
- 3 Жубанышева А.Ж., Абикенова Ш. О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам // Функциональные пространства и теория приближения функций: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского, Москва, Россия, 2015. – Москва, 2015. –С.141-142. - **труды конференций**
- 4 Курмуков А.А. Ангиопротекторная и гипополипидемическая активность леукомизина. –Алматы: Бастау, 2007. –С. 3-5 - **газетные статьи**
- 5 Кыров В.А., Михайличенко Г.Г. Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сибирские электронные математические известия –2017. –Т.14. –С.657-672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057. – URL: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. (дата обращения: 08.01.2017). - **электронный журнал**



А.Ж. Жұбанышева<sup>1</sup>, Н. Темірғалиев<sup>1</sup>, А.Б. Утесов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің теориялық математика және ғылыми есептеулер институты, Астана, Қазақстан

<sup>2</sup> Қ.Жұбанов атындағы. Ақтөбе өңірлік мемлекеттік университеті, Ақтөбе, Қазақстан

**Компьютерлік (есептеуіш) диаметр мәнмәтінінде функцияларды сандық дифференциалдау**

**Аннотация:** Компьютерлік (есептеуіш) диаметр мәнмәтінінде Соболев класында жататын функцияларды олардың тригонометриялық Фурье-Лебег коэффициенттерінің ақырлы жиынынан алынған дәл емес ақпарат бойынша жуықтау есебі толығымен шешілді [100-200 сөздер].

**Түйін сөздер:** жуықтап дифференциалдау, дәл емес ақпарат бойынша жуықтау, шектік қателік, Компьютерлік (есептеуіш) диаметр [6-8 сөз/сөз тіркестері].

A.Zh.Zhubanysheva<sup>1</sup>, N. Temirgaliyev<sup>1</sup>, A.B. Utesov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institute of theoretical mathematics and scientific computations of L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

<sup>2</sup> K.Zhubanov Aktobe Regional State University, Aktobe, Kazakhstan

**Numerical differentiation of functions in the context of Computational (numerical) diameter**

**Abstract:** The computational (numerical) diameter is used to completely solve the problem of approximate differentiation of a function given inexact information in the form of an arbitrary finite set of trigonometric Fourier coefficients. [100-200 words]

**Keywords:** approximate differentiation, recovery from inexact information, limiting error, computational (numerical) diameter, massive limiting error. [6-8 words/word combinations]

## References

- 1 Lokucievskij O.M., Gavrikov M.B. Nachala chislenogo analiza [Elements of numerical analysis] (Yanus, Moscow, 1995). [in Russian]
- 2 Temirgaliyev N. Komp'yuternyj (vychislitel'nyj) poperechnik kak sintez izvestnogo i novogo v chislenom analize [Computational (numerical) diameter as a synthesis of the known and the new in numerical analysis], Vestnik Evrazijskogo nacional'nogo universiteta imeni L.N. Gumileva [Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University], 4 (101), 16-33 (2014). [in Russian]
- 3 Zhubanysheva A.Zh., AbikenovaSh.K. O normah proizvodnyh funkcij s nulevymi znachenijami zadannogo nabora linejnyh funkcionalov i ih primeneniya k poperechnikovym zadacham [About the norms of the derivatives of functions with zero values of a given set of linear functionals and their application to the width problems]. Tezisy dokladov Mezhdunarodnoj konferencii, posvjashhennaja 110-letiju so dnja rozhdenija akademika S.M.Nikol'skogo "Funkcional'nye prostranstva i teoriya priblizhenija funkcij" [International conference on Function Spaces and Approximation Theory dedicated to the 110th anniversary of S. M. Nikol'skii]. Moscow, 2015, pp. 141-142. [in Russian]
- 4 Kurmukov A. A. Angioprotekornaja i gipolipidemicheskaja aktivnost' leukomizina [Angioprotective and lipid-lowering activity of leukomycin] (Bastau, Almaty, 2007, P. 3-5). [in Russian]
- 5 Kyrov V.A., Mihajlischenko G.G. Analiticheskij metod vložhenija simplekticheskoj geometrii [The analytic method of embedding symplectic geometry], Cibirskie jelektronnye matematicheskie izvestija [Siberian Electronic Mathematical Reports], 14, 657-672 (2017). doi: 10.17377/semi.2017.14.057. Available at: <http://semr.math.nsc.ru/v14/p657-672.pdf>. [in Russian]. (accessed 08.01.2017).

### Сведения об авторах:

*Жұбанышева А.Ж.* - Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Астана, Казахстан.

*Темірғалиев Н.* - Директор Института теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Астана, Казахстан.

*Утесов А.Б.* - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, Актюбинский региональный государственный университет имени К. Жұбанова, пр. А.Молдагуловой, 34, Ақтөбе, Қазақстан.

*Zhubanysheva A.Zh.* - Senior researcher of the Institute of theoretical mathematics and scientific computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., Astana, Kazakhstan.

*Temirgaliyev N.* - Head of the Institute of theoretical mathematics and scientific computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., Astana, Kazakhstan.

*Utesov A.B.* - candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, K.Zhubanov Aktobe Regional State University, A.Moldagulova Prospect, 34, Aktobe, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 15.05.2017

Редакторы: А.Қ. Арынгазин  
Шығарушы редактор, дизайн: А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің  
Хабаршысы. Физика. Астрономия сериясы.  
-2018 - 4(125) - Астана: ЕҰУ. 75-б.  
Шартты б.т. - 9,375 Таралымы - 20 дана.

Мазмұнына типография жауап бермейді.

Редакция мекен-жайы: 010008, Астана қ.,  
Сәтпаев көшесі, 2.  
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті  
Тел.: +7(7172) 70-95-00(ішкі 31-428)

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің баспасында басылды