ISSN (Print) 2616-6836
ISSN (Online) 2663-1296

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің

ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N. Gumilyov Eurasian National University

ВЕСТНИК
Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева

ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ сериясы

PHYSICS. ASTRONOMY Series

Серия **ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ**

№4(129)/2019

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Нұр-Сұлтан, 2019
Nur-Sultan, 2019
Нур-Султан, 2019

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Сәтбаев к-сі, 2, 402 б.,
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті.
Тел.: +7(7172) 709-500 (ішкі 31-428)
E-mail: vest_phys@enu.kz

Жауапты хатшы, компьютерде беттеген: А. Нұрболат

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Хабаршысы.
ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ сериясы
Меншіктенуші: ҚР БжҒМ "Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті" ШЖҚ РМК
Мерзімділігі: жылына 4 рет.
Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігінде 27.03.2018ж.
№16999-ж тіркеу куәлігімен тіркелген.
Ашық қолданудағы электрондық нұсқа: http://bulphysast.enu.kz/
Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Қажымұқан к-сі, 12/1, 349 б., Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті. Тел.: +7(7172)709-500 (ішкі 31-428)

Editorial address: L.N. Gumilyov Eurasian National University, 2, Satpayev str., of. 402,
Nur-Sultan, Kazakhstan 010008
Tel.: +7(7172) 709-500 (ext. 31-428)
E-mail: vest_phys@enu.kz

Responsible secretary, computer layout: A.Nurbolat

Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University.
PHYSICS. ASTRONOMY Series

Owner: Republican State Enterprise in the capacity of economic conduct "L.N. Gumilyov Eurasian National University" Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan

Periodicity: 4 times a year

Registered by the Ministry of Information and Communication of the Republic of Kazakhstan.

Registration certificate №16999-ж from 27.03.2018.

Available at: http: //bulphysast.enu.kz/

Address of printing house: L.N. Gumilyov Eurasian National University, 12/1 Kazhimukan str., Nur-Sultan,Kazakhstan 010008;
tel.:+7(7172) 709-500 (ext. 31-428)

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2, каб. 402, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева.
Тел.: (7172) 709-500 (вн. 31-428)
E-mail: vest_phys@enu.kz

Ответственный секретарь, компьютерная верстка: А. Нурболат

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.
Серия ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ
Собственник РГП на ПХВ "Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева" МОН РК
Периодичность: 4 раза в год
Зарегистрирован Министерством информации и коммуникаций Республики Казахстан.
Регистрационное свидетельство №16999-ж от 27.03.2018г.
Электронная версия в открытом доступе: http: //bulphysast.enu.kz/
Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Кажимукана, 12/1, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева. тел.: +7(7172)709-500 (вн. 31-428)

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ сериясы

№4(129)/2019

МАЗМҰНЫ

BULLETIN OF L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY. PHYSICS. ASTRONOMY SERIES

№4(129)/2019

CONTENTS

ВЕСТНИК ЕВРАЗИЙСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ Л.Н.ГУМИЛЕВА. Серия ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ

№4(129)/2019

СОДЕРЖАНИЕ

МРНТИ 29.05.03

А.Б. Мусатаева [1] **, Н.А. Мырзакулов** [2]

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
(E-mail: [1] *a.b.mussatayeva@gmail.com,* [2] *nmyrzakulov@gmail.com)*

Первая и вторая фундаментальные формы поверхности для уравнения Камасса-Холма [1]

Аннотация: Одной из актуальных задач математической физики является исследование нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Исследование в данном направлении очень важно, так как результаты находят теоретическое и практическое применение. Существуют различные подходы к решению данных уравнений. Методы теории солитонов позволяют построить решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Одним из методов решения указанных выше уравнений является метод обратной задачи рассеяния. Цель данной работы — определить первую и вторую фундаментальные формы поверхности, соответствующие солитонному решению нелинейного уравнения Камасса-Холма. Согласно данному подходу, в (1+1)-мерном случае нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных даются в виде условий нулевой кривизны и являются условием совместности системы линейных уравнений. Хорошо известно, что интегрируемые нелинейные уравнения Камасса-Холма играют важную роль в изучении распространение волн. С помощью известных методов преобразования можно найти различные солитонные решения уравнения Камасса-Холма. В данной работе с помощью формулы Сим-Тафеля для нелинейного уравнения Камасса-Холма определены первая и вторая фундаментальные формы поверхности. Полученный результат может быть использован для дальнейшего исследования многокомпонентного обобщенного уравнения Камасса-Холма.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, условие совместности, пара Лакса, поверхность, солитонное решение, фундаментальная форма, условие нулевой кривизны, уравнение Камасса-Холма.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-6836-2019-129-4-65-72

Введение. Уравнение Камасса–Холма представляет интерес в качестве модели в теории волн на воде. Кроме того, оно описывает аксиально-симметричные волны в гиперупругом стержне. Наиболее известным уравнением, описывающим волны на воде, является уравнение Кортевега–де Фриза, однако оно не описывает явление опрокидывания волн. Кроме устойчивых солитонных решений, уравнение Камасса-Холма, как и недавно полученное нелинейное интегрируемое уравнение Дегаспериса–Прочези, обладает гладкими решениями, в которых за конечное время развивают сингулярности типа опрокидывающихся волн, где решение остается ограниченным, но наклон становится неограниченным [2]-[5]. Эти уравнения используются в качестве моделей распространения волн в мелкой воде над плоским дном [6]-[11]. Физические применения, модификации и типы решений уравнения Камасса-Холма рассмотрены во многих работах [12]-[15]. Солитонные уравнения представляют собой важные интегрируемые модели во многих областях физики – гидродинамике, физике твердого тела, физике плазмы и т.д.

Некоторые нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных являются интегрируемыми, допускают физически интересные точные решения, более того, эти интегрируемые уравнения разрешимы методом обратной задачи рассеяния. Исследование интегрируемых уравнений в (1+1)-, (2+1)-измерениях являются актуальными с точки зрения математической физики. Интегрируемые уравнения допускают различные виды решений: односолитонное решение, решение доменной стенки, вихревое решение и т.д. Более того, решения интегрируемых уравнений имеют геометрические характеристики. Для исследования

[1]Работа выполнена в рамках финансовой поддержки научно-технической программы (Ф.0811, №0118РК00935).

геометрических свойств решений применяется теория дифференциальной геометрии кривых и поверхностей [15]-[20].

Уравнение Камасса-Холма

В 1993 году Камасс и Холм вывели интегрируемое обобщение нелинейного уравнения, позднее ставшее известным как уравнение Камасса-Холма [2]:

$$\begin{cases} q_t + 2u_x q + u q_x = 0 \\ q = u - u_{xx} \end{cases} \tag{1}$$

Уравнение (1) называется волновым уравнением Камасса-Холма в мелкой воде. Здесь u – скорость жидкости в направлении x, а постоянная k связана с критической скоростью волны на мелкой воде. Это уравнение впервые появилось в работе Б.Фукcштайнера и А.С.Фокаса по теории наследственных симметрий солитонных уравнений. Благодаря своему содержательному физическому смыслу, а также таким особым свойствам, как возможность применения метода обратного рассеяния, существование пары Лакса [2], бигамильтоновой структуры [3], солитонного и пиконного решений [4], уравнение Камасса-Холма привлекло большое внимание. Уравнение Камасса-Холма является бигамильтоновой системой и допускает интересные гладкие и остроконечные решения бегущих волн. Возникает как модельное уравнение в исследовании двумерных волн на воде, распространяющихся по плоскому слою. Было также найдено, что уравнение Камасса-Холма моделирует распространение нелинейных волн в цилиндрические гиперэластичные стержни, где $u(x,t)$ интерпретируется как радиальное растяжение стержня относительно невозмущенного состояния. Одна замечательная особенность уравнения Камасса-Холма представляет собой его пиковые решения, которые являются решениями вида [6]:

$$u(x,t) = ce^{(-|x-ct|)}.$$

Физический смысл уравнения Камасса-Холма представляет большой интерес, поскольку позволяет описывать решения, отображающие как пик, так и разрыв волны. Решения с разрушением волн остаются ограниченными, но их градиент становится неограниченным за конечное время. В дополнение к его универсальности в моделировании различных физических явлений уравнение Камасса-Холма воплощает богатую математическую структуру. Уравнение Камасса-Холма описывает взаимодействие длинной волны с коротким волновым пакетом, распространяющихся в плоскости (x, y), под некоторым углом друг к другу. В последнее время уравнение Камасса-Холма вызывает значительный интерес, как пример интегрируемой системы, имеющий общие волновые решения [7].

Первая фундаментальная форма поверхности для уравнения Камасса-Холма

Согласно уравнению Камасса-Холма приведем первую фундаментальную форму поверхности. Уравнение (1) является полностью интегрируемым и допускает пару Лакса [8]

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \lambda \\ \lambda q & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u+u_x) - \frac{1}{4\lambda^2} & \frac{1}{2\lambda} - \lambda u \\ \frac{1}{2\lambda}(q+u_x+u_{xx}) - \lambda u q & \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{1}{2}(u+u_x) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

где λ называется комплексный параметр собственного значения, а производные U из (2) и V из (3) относительно λ выглядят как:

$$U_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$V_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\lambda^3} & -\frac{1}{2\lambda^2} - u \\ -\frac{1}{2\lambda^2}\left(q + u_x + u_{xx}\right) - uq & -\frac{1}{2\lambda^3} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

В (1+1)-мерном случае нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных даются в виде условий нулевой кривизны:

$$U_t - V_x + [U, V] = 0, \tag{6}$$

где $[U, V] = UV - VU$, матрица U и V задана [9].

Также нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных (6) является условием совместности системы линейных уравнений:

$$\Phi_x = U\Phi,$$

$$\Phi_t = V\Phi.$$

В этом случае существует поверхность. Используя формулу Сим-Тафеля

$$r = \Phi^{-1}\Phi_\lambda,$$

определяем следующие формулы:

$$r_x = \Phi^{-1}U_\lambda\Phi, \tag{7}$$
$$r_t = \Phi^{-1}V_\lambda\Phi. \tag{8}$$

Первая квадратичная форма (или первая фундаментальная форма или метрический тензор) поверхности - квадратичная форма на касательном расслоении поверхности, которая определяет внутреннюю геометрию поверхности в окрестности данной точки. Первая квадратичная форма часто обозначается I . Первая фундаментальная форма поверхности для уравнения Камасса-Холма определяется как [10]

$$I = -\vec{dr} \cdot \vec{dr} = \vec{r}_x^2 dx^2 + 2\vec{r}_x\vec{r}_t dxdt + \vec{r}_t^2 dt^2. \tag{9}$$

Соотношения между производными вектора и матричной формы r относительно x и t :

$$\vec{r}_x^2 = \frac{1}{2}tr\left(r_x^2\right), \tag{10}$$

$$\vec{r}_t^2 = \frac{1}{2}tr\left(r_t^2\right), \tag{11}$$

$$\vec{r}_x\vec{r}_t = \frac{1}{2}tr\left(r_x r_t\right), \tag{12}$$

где r_x и r_t являются некоторыми матрицами.

Из (7) и (8) получаем

$$r_x^2 = \Phi^{-1}U_\lambda^2\Phi, \tag{13}$$

$$r_t^2 = \Phi^{-1}V_\lambda^2\Phi, \tag{14}$$

$$r_x r_t = \Phi^{-1}U_\lambda V_\lambda\Phi, \tag{15}$$

где

$$trU_\lambda^2 = 2q,$$

$$trV_\lambda^2 = \frac{1}{2\lambda^6} + 2\left(-\frac{1}{2\lambda^2}\left(q + u_x + u_{xx}\right) - uq\right) \cdot \left(-\frac{1}{2\lambda^2} - u\right),$$

$$trU_\lambda V_\lambda = -\frac{1}{2\lambda^2}\left(q + u_x + u_{xx}\right) - uq + q\left(-\frac{1}{2\lambda^2} - u\right).$$

Учитывая (13), (14), (15) имеем

$$\vec{r}_x^2 = q, \tag{16}$$

$$\vec{r}_x\vec{r}_t \quad = \quad -\frac{1}{4\lambda^2}\left(q+u_x+u_{xx}\right)-\frac{uq}{2}+\frac{q}{2}\left(-\frac{1}{2\lambda^2}-u\right), \tag{17}$$

$$\vec{r}_t^2 \quad = \quad \frac{1}{4\lambda^6}+\left(-\frac{1}{2\lambda^2}-u\right)\left(\frac{1}{2\lambda^2}(q+u_x+u_{xx})-uq\right). \tag{18}$$

Подставим (16), (17), (18) в (9) и получим первую фундаментальную форму для уравнения Камасса-Холма:

$$I=qdx^2-\frac{1}{2\lambda^2}(q+u_x+u_{xx})-uq+q\left(-\frac{1}{2\lambda^2}-u\right)dxdt+\frac{1}{4\lambda^6}+\left(-\frac{1}{2\lambda^2}-u\right)\left(\frac{1}{2\lambda^2}(q+u_x+u_{xx})-uq\right)dt^2.$$

Зная первую квадратичную форму поверхности, можно вычислить длины кривых на поверхности, углы между кривыми и площади областей на поверхности. Если известна первая квадратичная форма поверхности, можно исследовать геометрию на поверхности, не обращаясь к ее уравнениям, а лишь используя ее первую квадратичную форму.

Вторая фундаментальная форма поверхности для уравнения Камасса-Холма

Вторая квадратичная форма (или вторая фундаментальная форма) поверхности - квадратичная форма на касательном расслоении поверхности, которая, в отличие от первой квадратичной формы, определяет внешнюю геометрию поверхности в окрестности данной точки [10].

Вторая фундаментальная форма поверхности для уравнения Камасса-Холма имеет вид

$$II=-d\vec{r}\cdot d\vec{n}=\left(\vec{r}_{xx}\cdot\vec{n}\right)dx^2+2\left(\vec{r}_{xt}\cdot\vec{n}\right)dxdt+\left(\vec{r}_{tt}\cdot\vec{n}\right)dt^2. \tag{19}$$

Используя формулу Сим-Тафеля, получим

$$r_{xx} \quad = \quad \Phi^{-1}U_{\lambda x}\Phi+\Phi^{-1}\left[U_\lambda,U\right]\Phi, \tag{20}$$

$$r_{xt} \quad = \quad \Phi^{-1}U_{\lambda t}\Phi+\Phi^{-1}\left[U_\lambda,V\right]\Phi, \tag{21}$$

$$r_{tt} \quad = \quad \Phi^{-1}V_{\lambda t}\Phi+\Phi^{-1}\left[V_\lambda,V\right]\Phi. \tag{22}$$

где

$$U_{\lambda x}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$U_{\lambda t}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_t & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_{\lambda t}=\begin{pmatrix} 0 & -u_t \\ -\frac{1}{2\lambda^2}\left(u_x+u_{xx}\right)-u_tq-uq_t & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left[U_\lambda,U\right]=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[U_\lambda,V\right]=\begin{pmatrix} \frac{1}{2\lambda}\left(u_x+u_{xx}\right) & \frac{1}{2\lambda^2}-\left(u+u_x\right) \\ q\left(u+u_x\right)-\frac{q}{2\lambda^2} & -\frac{1}{2\lambda}\left(u_x+u_{xx}\right) \end{pmatrix}$$

$$\left[V_\lambda,V\right]=\begin{pmatrix} -\frac{u}{\lambda}\left(2q+u_x+u_{xx}\right) & \frac{1}{2\lambda^4}-\frac{u}{\lambda^2} \\ \frac{1}{4\lambda^4}\left(q+u_x+u_{xx}+2\lambda^2uq\right)\left(2\lambda^2\left(u+u_x\right)+1\right) & \frac{u}{\lambda}\left(2q+u_x+u_{xx}\right) \end{pmatrix}$$

Нормаль (n) к поверхности можно рассчитать по формуле

$$n=\frac{\Phi^{-1}\left[U_\lambda,V_\lambda\right]\Phi}{\sqrt{\frac{1}{2}tr\left(\left[U_\lambda,V_\lambda\right]^2\right)}} \tag{23}$$

где

$$\left[U_\lambda,V_\lambda\right]=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2\lambda^2}\left(u_x+u_{xx}\right) & -\frac{1}{\lambda^3} \\ \frac{q}{\lambda^3} & \frac{1}{2\lambda^2}\left(u_x+u_{xx}\right) \end{pmatrix}$$

$$([U_\lambda, V_\lambda])^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\lambda^4}\left(u_x+u_{xx}\right)^2-\frac{q}{\lambda^6} & 0 \\ 0 & -\frac{q}{\lambda^6}+\frac{1}{4\lambda^4}\left(u_x+u_{xx}\right)^2 \end{pmatrix},$$

Соотношения между производными вектора и матричной формы r относительно x и t имеют вид:

$$\vec{r}_{xx}\cdot\vec{n} = \frac{1}{2}tr\left(r_{xx}\cdot n\right), \tag{24}$$

$$\vec{r}_{xt}\cdot\vec{n} = \frac{1}{2}tr\left(r_{xt}\cdot n\right), \tag{25}$$

$$\vec{r}_{tt}\cdot\vec{n} = \frac{1}{2}tr\left(r_{tt}\cdot n\right). \tag{26}$$

Из (24), (25), (26) имеем

$$tr\left(r_{xx}\cdot n\right) = \frac{2\left(2q-q_x\right)}{\sqrt{\lambda^2\left(u_x+u_{xx}\right)^2-4q}}, \tag{27}$$

$$tr\left(r_{xt}\cdot n\right) = \frac{2q-4q\lambda^2\left(u+u_x\right)-\lambda^2(u_x^2+u_{xx}^2)-2\lambda^2\left(u_xu_{xx}+q_t\right)}{\lambda^2\sqrt{\lambda^2\left(u_x+u_{xx}\right)^2-4q}}, \tag{28}$$

$$tr\left(r_{tt}\cdot n\right) = \frac{4\left(\lambda^4u\cdot a+b\lambda^2+\frac{q}{4}+\frac{u_x}{8}+\frac{u_{xx}}{8}\right)}{\lambda^4\sqrt{\lambda^2\left(u_x+u_{xx}\right)^2-4q}}, \tag{29}$$

где

$$a = \frac{u_x^2}{2}+(q+u_{xx})u_x+uq+\frac{u_{xx}^2}{2}+\frac{q_t}{2},$$

$$b = \frac{u_x^2}{4}+\left(\frac{q}{2}+\frac{u}{4}+\frac{u_{xx}}{4}+\frac{1}{4}\right)u_x+\left(-q+\frac{u_{xx}}{4}\right)u+\frac{u_{xx}}{4}.$$

Подставляя (27), (28), (29) в (19) получим вторую фундаментальную форму поверхности для уравнения Камасса-Холма

$$II = \frac{2\left(2q-q_x\right)}{\sqrt{\lambda^2\left(u_x+u_{xx}\right)^2-4q}}dx^2+$$
$$+2\frac{\left(2q-4q\lambda^2\left(u+u_x\right)-\lambda^2(u_x^2+u_{xx}^2)-2\lambda^2\left(u_xu_{xx}+q_t\right)\right)}{\lambda^2\sqrt{\lambda^2\left(u_x+u_{xx}\right)^2-4q}}dxdt+$$
$$+\frac{4\left(\lambda^4u\cdot a+b\lambda^2+\frac{q}{4}+\frac{u_x}{8}+\frac{u_{xx}}{8}\right)}{\lambda^4\sqrt{\lambda^2\left(u_x+u_{xx}\right)^2-4q}}dt^2.$$

Вторая квадратичная форма является весьма эффективным средством исследования геометрических свойств регулярной поверхности.

Заключение. В работе рассмотрено уравнение Камасса-Холма, интегрируемость которого осуществляется допущением для него представления Лакса. Найдена первая и вторая фундаментальные формы поверхности, а также соответствующие солитонному решению нелинейного уравнения Камасса-Холма с притяжением.

Для нахождения первой и второй фундаментальных форм поверхности были применены формула Сим-Тафеля и теория дифференциальной геометрии поверхности. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего исследования многокомпонентного уравнения Камасса-Холма, а также нахождения их точных решений, имеющих физические приложения.

Список литературы

1 Ablowitz M.J., Clarkson P.A. Solitons, Non-linear Evolution Equations and Inverse Scattering. -Cambridge: Cambridge University Press, -1992.-P.516

2 Новиков С.П., Манаков С.В. Солитоны. -М.: «Мир», -1983. -408 с.

3 Camassa R., Holm D., An integrable shallow water equation with peaked solitons // Physical Review Letters. -1993. -V.71. -P.1661. doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.1661

4 Novikov S., Manakov S., Pitaevsky L., Zakharov V. Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method // New York, Plenum -1984. -N.11. -P.276

5 Camassa R., Holm D., Hyman J. A new integrable shallow water equation // Advances in Applied Mechanics -1994. -V.31. -P. 1-33. doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70254-0

6 Fuchssteiner B., Fokas A.S. Symplectic structures, their Backlund transformations and hereditary symmetries // Physica D: Nonlinear Phenomena -1981. -V.4. -P.47. doi.org/10.1016/0167-2789(81)90004-X

7 Ivanov R., Lyons T., Orr N. A dressing method for soliton solutions of the Camassa-Holm equation // AIP Conference Proceedings -2017.-V.1895. -P.1-3. **№** 040003. doi.org/10.1063/1.5007370.

8 Baoqiang X., Zhijun Q. Multi-component generalization of Camassa-Holm equation // Nonlinear Sciences Exactly Solvable and Integrable Systems -2015. -V.2. -P.1-3. doi.org/10.1016/j.geomphys.2016.04.020

9 Pressley A. Elementary Differential Geometry.London: Springer, -2001. doi.org/10.1007/978-1-84882-891-9

10 Rogers C., Schief W.K. Backlund and Darboux transformations: geometry and modern applications in soliton theory // Cambridge University Press. -2002. -P.18-41. doi.org/10.1017/CBO9780511606359

11 Qiao Z.J. The Camassa-Holm Hierarchy, N-Dimensional Integrable Systems and Algebro-Geometric Solution on a Symplectic Submanifold // Communications in Mathematical Physics -2003. -V.239. -P.30. doi.org/10.1007/s00220-003-0880-y

12 Myrzakulov R., Martina L., Kozhamkulov T.A., Myrzakul Kur. Integrable Heisenberg ferromagnets and soliton geometry of curves and surfaces. In book: "Nonlinear Physics: Theory and Experiment. II". World Scientific -2003. -P.248-253. doi.org/10.1142/9789812704467 0035

13 Novikov V., Phys. J. Generalizations of the Camassa–Holm equation //Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical -2009. -V.42. -P.34. doi.org/10.1088/1751-8113/42/34/342002

14 Li H. Two-component generalizations of the Novikov equation // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. -2019. -V.26. -N.3. doi.org/10.1080/14029251.2019.1613048

15 Yersultanova Z.S., Zhassybayeva M., Yesmakhanova K., Nugmanova G., Myrzakulov R. Darboux transformation and exact solutions of the integrable Heisenberg ferromagnetic equation with self-consistent potentials // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. -2015. -V.2. -P.3-7. **№** 1550134. doi.org/10.1142/S0219887815501340

16 Myrzakulov R., Mamyrbekova G., Nugmanova G., Lakshmanan M. Integrable (2+1)-dimensional spin models with self-consistent potentials // Symmetry -2015. -V.7. **№**3. -P.1352-1375. doi.org/10.3390/sym7031352

17 Myrzakul Akbota, Myrzakulov R. Integrable motion of two interacting curves, spin systems and the Manakov system // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics -2017. -V.14. **№**7. doi.org/10.1142/S0219887817501158

18 Myrzakulov R., Danlybaeva A.K., Nugmanova G. N., Geometry and multidimensional soliton equations, TMF, -1999. -V.118. **№**3, -P. 441-451. doi.org/10.4213/tmf717.

19 Myrzakulov R., Mamyrbekova G.K., Nugmanovaa G.N., Yesmakhanova K.R, Lakshmanan M. Integrable motion of curves in self-consistent potentials: Relation to spin systems and soliton equations // Physics Letters A -2014. -V.378. №30. -P.2118-2123. doi.org/10.1016/j.physleta.2014.05.010

20 Мусатаева А.Б. Многокомпонентное обобщенное уравнения Камасса-Холма // Сборник материалов XIV Международной научной конференции «Наука и образование – 2019».ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. -2019. -С.298–302

А.Б Мусатаева, Н.А Мырзакулов

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Камасс-Холм теңдеуі үшін беттің бірінші және екінші фундаменталды формасы

Аңдатпа. Сызықты емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді зерттеу - математикалық физиканың өзекті мәселелерінің бірі. Нәтижелердің теориялық және практикалық қолданысы болғандықтан, бұл бағыттағы зерттеулер маңызды. Бұл теңдеулерді шешудің әр түрлі әдістері бар. Солитондар теориясы әдістері дербес туындылы сызықты емес теңдеулердің шешімін табуға мүмкіндік береді. Кері сейілу әдісі - айтылған теңдеулерді шешуге арналған әдістердің бірі. Жұмыстың мақсаты - сызықты емес Камасс-Холм теңдеуінің солитондық шешіміне сәйкес беттің бірінші және екінші фундаменталды формасын анықтау.

Осы әдіске сай, сызықты емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеу (1+1)-өлшемді жағдайында нөлдік қисықтық шарты түрінде беріледі және сызықты теңдеулер жүйесінің сәйкестік шарты болып табылады. Камасс-Холм сызықты емес теңдеулері толқындардың таралуын зерттеуде маңызды рөл атқаратыны белгілі. Сонымен, бізге белгілі түрлендірулер әдістері арқылы Камасс-Холм теңдеуінің әр түрлі солитонды шешімдерін табуға болады. Бұл жұмыста Сим-Тафель формуласының көмегімен Камасс-Холм теңдеуі үшін беттің бірінші және екінші фундаменталды формасы анықталды. Алынған нәтижені көп компонентті жалпыланған Камасс-Холм теңдеулерін ары қарай зерттеулерде қолдануға болады.

Түйін сөздер: сызықты емес теңдеу, сәйкестік шарты, Лакс жұбы , бет, солитондық шешім, фундаменталдық форма, Камасс-Холм теңдеуі.

A.B. Mussatayeva, N.A. Myrzakulov

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

The first and second fundamental forms for the Camassa-Holm equation

Abstract. One of the actual problems of mathematical physics is the study of nonlinear partial differential equations. Research in this direction is very important, as the results are theoretical and practical application. There are different approaches to solving these equations. Methods of soliton theory allow us to construct solutions of nonlinear partial differential equations. One of the methods for solving the above equations is the method of the inverse scattering problem. The purpose of this work is to determine the first and second fundamental forms of the surface corresponding to the soliton solution of the nonlinear Camassa-Holm equation. According to this approach, in the (1+1)-dimensional case, nonlinear partial differential equations are given as zero curvature conditions and are a condition of compatibility of the system of linear equations. It is well known that the integrable nonlinear Camassa-Holm equations play an important role in the study of wave propagation. Various soliton solutions of the Camassa-Holm equation can be found using known transformation methods. In this paper, the first and second fundamental forms of the surface are determined using the Sym-Tafel formula for the nonlinear Camassa-Holm equation. The obtained result can be used for further investigation of the multicomponent generalized Camassa-Holm equation.

Keywords: nonlinear equation, condition of compatibility, Lax pair, surface, soliton solution, fundamental form, zero curvature condition, Camassa-Holm equation.

References

1 Ablowitz M.J., Clarkson P.A. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering, (Cambridge University Press, Cambridge, 1992, 513 p.).

2 Novikov S.P., Manakov S.B. Solitony [Solitons] (Mir, Moscow, 1983). [in Russian]

3 Camassa R., Holm D., An integrable shallow water equation with peaked solitons, Physical Review Letters, **71**. 1661 (1993). doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.1661

4 Novikov S., Manakov S., Pitaevsky L., Zakharov V. Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method, New York, Plenum. (1984).

5 Camassa R., Holm D., Hyman J. A new integrable shallow water equation, Advances in Applied Mechanics, **31**, 1-33 (1994). doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70254-0

6 Fuchssteiner B., Fokas A.S. Symplectic structures, their Backlund transformations and hereditary symmetries, Physica D: Nonlinear Phenomena, 4, 47 (1981). doi.org/10.1016/0167-2789(81)90004-X

7 Ivanov R., Lyons T., Orr N. A dressing method for soliton solutions of the Camassa-Holm equation, AIP Conference Proceedings,**1895**, 040003 (2017). doi.org/10.1063/1.5007370.

8 Baoqiang X., Zhijun Q. Multi-component generalization of Camassa-Holm equation, Nonlinear Sciences Exactly Solvable and Integrable Systems, **2**3 (2015). doi.org/10.1016/j.geomphys.2016.04.020

9 Pressley A. Elementary Differential Geometry. Springer, London. (2001). doi.org/10.1007/978-1-84882-891-9

10 Rogers C., Schief W.K. Backlund and Darboux transformations: geometry and modern applications in soliton theory, Cambridge University Press. **530,**124. 18-41 (2002). doi.org/10.1017/CBO9780511606359

11 Qiao Z.J. The Camassa-Holm Hierarchy, N-Dimensional Integrable Systems and Algebro-Geometric Solution on a Symplectic Submanifold, Communications in Mathematical Physics, **239**, 309–341 (2003). doi.org/10.1007/s00220-003-0880-y

12 Myrzakulov R., Martina L., Kozhamkulov T.A., Myrzakul Kur. Integrable Heisenberg ferromagnets and soliton geometry of curves and surfaces. In book: "Nonlinear Physics: Theory and Experiment. II". World Scientific. 248-253 (2003). doi.org/10.1142/9789812704467 0035

13 Novikov V., Phys. J. Generalizations of the Camassa–Holm equation, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. **42,**34, 342002 (2009). doi.org/10.1088/1751-8113/42/34/342002

14 Li H., Two-component generalizations of the Novikov equation, Journal of Nonlinear Mathematical Physics. **26**(3), (2019). doi.org/10.1080/14029251.2019.1613048

15 Yersultanova Z.S. , Zhassybayeva M., Yesmakhanova K., Nugmanova G., Myrzakulov R. Darboux transformation and exact solutions of the integrable Heisenberg ferromagnetic equation with self-consistent potentials, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. **13**(01), 1550134 (2016). doi.org/10.1142/S0219887815501340

16 Myrzakulov R., Mamyrbekova G., Nugmanova G., Lakshmanan M. Integrable (2+1)-dimensional spin models with self-consistent potentials, Symmetry, **7**3, 1352-1375 (2015). doi.org/10.3390/sym7031352

17 Myrzakul Akbota, Myrzakulov R. Integrable motion of two interacting curves, spin systems and the Manakov system, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. **14**07. 1750115 (2017). doi.org/10.1142/S0219887817501158

18 Myrzakulov R., Danlybaeva A.K., Nugmanova G. N., Geometry and multidimensional soliton equations, TMF. **118**3, 441-451 (1999). doi.org/10.4213/tmf717.

19 Myrzakulov R., Mamyrbekova G.K., Nugmanovaa G.N., Yesmakhanova K.R, Lakshmanan M. Integrable motion of curves in self-consistent potentials: Relation to spin systems and soliton equations, Physics Letters A. **378**30, 2118-2123 (2014). doi.org/10.1016/j.physleta.2014.05.010

20 Mussatayeva A.B. Multi-component generalization of Camassa-Holm equation, Proceeding of the XIV International Scientific Conference for students and young scholars. [L.N. Gumilyov Eurasian National University], 298–302 (2019). [in Russian]

Сведения об авторах:

Мусатаева А.Б. - докторант кафедры общей и теоретической физики, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, ул.Кажымукана, 13, Нур-Султан, Казахстан.

Мырзакулов Н.А. - PhD, и.о. доцента кафедры общей и теоретической физики, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, ул.Кажымукана, 13, Нур-Султан, Казахстан.

Mussatayeva A.B. – Doctoral student of Department of General and Theoretical Physics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, 13 Kazhimukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan.

Myrzakulov N.A. – PhD, Accociate Professor of Department of General and Theoretical Physics, L.N. Gumilyov Eurasian National University, 13 Kazhimukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan.