Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Физика. Астрономия сериясы, 2021, том 135, №2, 31-37 беттер
http://bulphysast.enu.kz, E-mail: vest_phys@enu.kz

МРНТИ: **41.29.25**

Н.Б. Нуржау, О.В. Разина

Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
(E-mail: nurziya.nurzhau@mail.ru, olvikraz@mail.ru)

Динамика модифицированной экспоненциальной модели инспирированная скалярным и максвелловским полем

Аннотация: мы исследовали $f(R)$ – гравитацию с полем типа Максвелла и k-эссенцией с помощью однородной изотропной и плоской Вселенной Фридмана – Робертсона – Уокера. Нашли для этой модели уравнения движения, вычислили решение для масштабного фактора и функции скалярного поля, а также решение для потенциала скалярного поля.Мы нашли плотность темной энергии и давление, исследовали параметры медленного скатывания. Для этой модели наклон и кривизна потенциала, иначе называемые параметры медленного скатывания, удовлетворяют условию возникновения инфляции. Исследуемая нами модель позволяет получить ускоренное расширение Вселенной в период инфляции. Со временем поле уменьшается, медленно спадает, и Вселенная выходит из инфляционного режима, что демонстрирует экспоненциальную динамику изменения закона расширения Вселенной.

Ключевые слова: $f(R)$ – гравитация, k-эссенция, поле Максвелла, ускоренное расширение Вселенной, скалярное поле, инфляция.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-6836-2021-135-2-31-37

Поступила: 16.04.2021/ **Допущена к опубликованию:** 15.05.2021

Введение. Вот уже 20 лет перед современной физикой стоит вопрос: что же представляет собой ускоренное расширение Вселенной. Феномен ускоренного расширения Вселенной представляет собой загадку, имеющую различные последствия для развития науки и технологий. После открытия этого явления было предложено несколько моделей. Один из них так называемая темная энергия, которая была обнаружена в 1998 году при изучении за сверхновыми звездами [1-4].

Темная энергия имеет три основных свойства:

Во-первых, темная энергия распространена равномерно во всей Вселенной и занимает больше 70% от всего пространства.

Во-вторых, она имеет отрицательное давление, что заставляет Вселенную расширяться ускоренно.

В-третьих, темная энергия имеет уникальное уравнение состояния

$$p = \omega\rho,$$

где ω - параметр уравнения состояния.

Три описанных свойства указывают на то, что темная энергия в некотором роде испытывает антигравитацию, поскольку существует гравитационное свойство отталкивания, а не гравитационного притяжения. В результате расширение Вселенной ускоряется [5-6].

Поскольку ОТО описывает раннюю инфляцию, была введена $f(R)$ – гравитация, которая дополняет теорию гравитации Эйнштейна. Модели f(R) – гравитации способны описать инфляцию Вселенной как на ранней стадии, так и на поздней. $f(R)$ – гравитация не требует введения дополнительных параметров для описания темной материи и темной энергии [7-8].

Единицы измерения выбираем так, что $8\pi G = c = \hbar = 1$.

Вывод уравнений движения. Действие для исследуемой модели выглядит следующим образом:

$$S=\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}[f(R)-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+2K(X,\phi)], \tag{1}$$

где g-метрический тензор, R-скалярная кривизна Риччи, $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$-член Максвелла, K-k-эссенция.

Исследуем нашу модель при помощи метрики Фридмана-Робертсона-Уокера, которая является общим видом метрики плоского, однородного и изотропного пространства [9].

$$dS=-dt+a^2(t)(dx^2+dy^2+dz^2),$$

где $x^0=t, x^1=x, x^2=y, x^3=z$.

Для этой метрики скалярная кривизна, вычисленная с помощью метрического тензора и символов Кристоффеля равна

$$R=6\left(\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right).$$

Тензор напряженности электромагнитного поля имеет вид

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu.$$

Мы выбрали пространственно-подобное векторное поле в виде

$$A_\mu=(0,A_1(t),A_2(t),A_3(t)). \tag{2}$$

Найдем член поля Максвелла. Для этого сначала вычислим его отдельные компоненты с помощью тензора напряженности

$$F_{01}F^{01}=(F_{01})^2g^{00}g^{11}=-(\dot{A}_1)^2a^{-2}=F_{10}F^{10},$$
$$F_{02}F^{02}=(F_{02})^2g^{00}g^{22}=-(\dot{A}_2)^2a^{-2}=F_{20}F^{20},$$
$$F_{03}F^{03}=(F_{03})^2g^{00}g^{33}=-(\dot{A}_3)^2a^{-2}=F_{30}F^{30}.$$

Суммируя по компонентам, получим

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=-2a^{-2}\left[(\dot{A}_1)^2+(\dot{A}_2)^2+(\dot{A}_3)^2\right],$$

Перепишем действие (1), преобразовав его с помощью метода множителей Лагранжа и введя полученные значения

$$S=\frac{1}{8\pi G}\int d^4x\left[\frac{a^3}{2}f-\lambda\left(Ra^3-6\left(\ddot{a}a^2+\dot{a}^2a\right)\right)+a\left((\dot{A}_1)^2+(\dot{A}_2)^2+(\dot{A}_3)^2\right)+a^3K\right], \tag{3}$$

где λ -множитель Лагранжа.

Тогда лагранжиан будет иметь вид

$$L=\left[\frac{a^3}{2}f-\lambda\left(Ra^3-6a^3\left(\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\right)+a\left((\dot{A}_1)^2+(\dot{A}_2)^2+(\dot{A}_3)^2\right)+a^3K\right]. \tag{4}$$

Для того чтобы найти λ, воспользуемся уравнением Эйлера-Лагранжа относительно скалярной кривизны R

$$L_R-(L_{\dot{R}})_t=0,$$
$$L_R=\frac{a^3}{2}f_R-\lambda a^3,$$
$$L_{\dot{R}}=0.$$

Подставим полученные значения в (6)

$$\frac{a^3}{2}f_R-\lambda a^3=0,$$

откуда

$$\lambda=\frac{f_R}{2}.$$

Для того чтобы найти уравнения движения, используя уравнение Эйлера-Лагранжа, необходимо понизить степень производной в (4)

$$(3\dot{a}a^2 f_R)_t = 3\ddot{a}a^2 f_R + 6\dot{a}^2 a f_R + 3\dot{a}a^2 f_{RR}\dot{R}.$$

Тогда лагнранжиан (4) будет выглядеть следующим образом:

$$L = \frac{a^3}{2}f - \frac{a^3}{2}Rf_R - 3\dot{a}a^2 f_{RR}\dot{R} - 3\dot{a}^2 a f_R + a\left((\dot{A}_1)^2 + (\dot{A}_2)^2 + (\dot{A}_3)^2\right) + a^3 K. \quad (5)$$

Для получения уравнений движения воспользуемся уравнением Эйлера-Лагранжа

$$L_q - (L_{\dot{q}})_t = 0$$

и условием нулевой энергии

$$L_{\dot{q}}\dot{q} - L = 0.$$

Система уравнений движения имеет следующий вид:

$$3H^2 = \rho, \quad (6)$$

$$3H^2 + 2\dot{H} = -p, \quad (7)$$

$$K_X\ddot{\varphi} + (\dot{K}_X + 3HK_X)\varphi - K_\varphi = 0, \quad (8)$$

$$\ddot{A}_1 + H\dot{A}_1 = 0, \quad (9)$$

$$\ddot{A}_2 + H\dot{A}_2 = 0, \quad (10)$$

$$\ddot{A}_3 + H\dot{A}_3 = 0, \quad (11)$$

где

$$\rho = \frac{1}{f_R}\left[-3H\dot{R}f_{RR} + \frac{1}{2}Rf_R - \frac{1}{2}f + \frac{1}{a^2}\left((\dot{A}_1)^2 + (\dot{A}_2)^2 + (\dot{A}_3)^2\right) + 2K_X X - K\right], \quad (12)$$

$$p = \frac{1}{f_R}\left[f_{RRR}\dot{R}^2 + (2H\dot{R} + \ddot{R})f_{RR} - \frac{1}{2}Rf_R + \frac{1}{2}f + \frac{(\dot{A}_1)^2 + (\dot{A}_2)^2 + (\dot{A}_3)^2}{3a^2} + K\right]. \quad (13)$$

являются плотностью темной энергии и давление соответственно.

Поиск аналитического решения. Рассмотрим случай, когда

$$f(R) = R + \alpha R^2, \quad (14)$$

где α - некоторая константа.

Выберем вид лагранжиана k-эссенции в виде

$$K = X - V, \quad (15)$$

а также компоненты потенциала векторного поля зададим в виде

$$A_1 = A_2 = A_3 = \varphi. \quad (16)$$

Перепишем систему уравнений движения (6)-(13) с учетом (14)-(16)

$$3H^2 = \rho, \quad (17)$$

$$3H^2 + 2\dot{H} = -p, \quad (18)$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V_\varphi = 0, \quad (19)$$

$$3\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} = 0. \quad (20)$$

Тогда плотность темной энергии и давление будут иметь вид

$$\rho = \frac{1}{1+2\alpha R}\left[-6\alpha H\dot{R} + \frac{1}{2}\alpha R^2 + \frac{3\dot{\varphi}^2}{a^2} + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V\right], \quad (21)$$

$$p = \frac{1}{1+2\alpha R}\left[2\alpha(2H\dot{R} + \ddot{R}) - \frac{1}{2}\alpha R^2 + \frac{\dot{\varphi}^2}{a^2} + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V\right]. \quad (22)$$

Выберем масштабный фактор в виде экспоненциальной функции

$$a = a_0 e^{\gamma t}, \quad (23)$$

где a_0 и γ - некоторые константы, и вычислим скалярную кривизну

$$R = 6\left(\frac{a_0\gamma^2 e^{\gamma t}}{a_0 e^{\gamma t}} + \frac{a_0^2\gamma^2 e^{2\gamma t}}{a_0^2 e^{2\gamma t}}\right) = 12\gamma^2. \quad (24)$$

На рисунке 1 показана зависимость масштабного фактора от t при $a_0 = 1.5$, где $\gamma = 1.2$

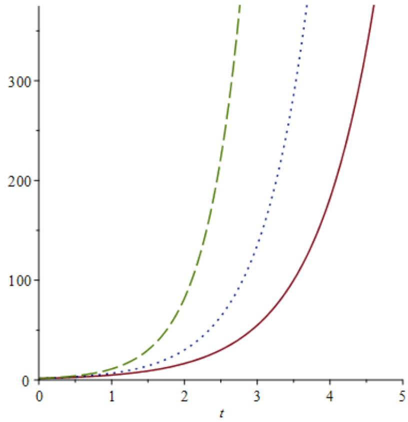

Рисунок 1 – Масштабный фактор a в зависимости от времени t

для сплошной линии, $\gamma = 1.5$ для точечной линии, $\gamma = 2$ для пунктирной линии. Для ускоренного расширения Вселенной необходимо, чтобы $\gamma > 1$. Из уравнения (20) найдем функцию скалярного поля, гравик которого представлен на рисунке 2

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\gamma t} + \varphi_1, \quad (25)$$

где φ_0, φ_1 - постоянные.

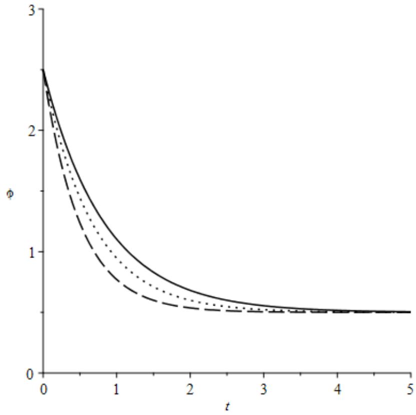

Рисунок 2 – Функция скалярного поля φ в зависимости от времени t при $varphi_0 = 2, varphi_1 = 2$

На рисунке 2 показан график функции скалярного поля $varphi$ в зависимости от t при $f_0 = 2$, $f_1 = 2$, где $\gamma = 1.2$ для сплошной линии, $\gamma = 1.5$ для точечной линии, $\gamma = 2$ для пунктирной линии.

Зная функцию скалярного поля (25) и закон расширения Вселенной (23), найдем потенциал скалярного поля из уравнения (19)

$$V = \gamma^2\varphi_0^2 e^{-2\gamma t} + V_{10}, \quad (26)$$

где V_{10} - константа интегрирования.

Из уравнений (21) и (22) найдем плотность темной энергии и давление

$$\rho = \frac{1}{1+24\alpha\gamma^2}\left[72\alpha\gamma^2 + \frac{3\gamma^2\varphi^2}{a_0^2 e^{4\gamma t}} + \frac{3}{2}\gamma^2\varphi_0^2 e^{-2\gamma t} + V_{10}\right], \quad (27)$$

$$p=\frac{1}{1+24\alpha\gamma^2}\left[-72\alpha\gamma^2+\frac{\gamma^2\varphi_0^2}{a_0^2e^{4\gamma t}}-\frac{1}{2}\gamma^2\varphi_0^2e^{-2\gamma t}-V_{10}\right]. \quad (28)$$

Наклон потенциала и кривизну потенциала или параметры медленного скатывания можно получить с помощью скалярного потенциала и функции скалярного поля

$$\varepsilon(t)=\frac{1}{2\dot{\varphi}^2}\left(\frac{\dot{V}}{V}\right)^2, \quad (29)$$

$$\eta(t)=\frac{\ddot{V}}{\dot{\varphi}^2}-\frac{\dot{V}\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^3}. \quad (30)$$

Для нашей модели параметры медленного скатывания будут иметь вид

$$\varepsilon(t)=\frac{2\gamma^4\varphi_0^2e^{-2\gamma t}}{(\gamma^2\varphi_0^2e^{-2\gamma t}+V_{10})^2},$$
$$\eta(t)=\frac{\ddot{V}}{\dot{\varphi}^2}-\frac{\dot{V}\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^3}. \quad (31)$$

Для возникновения инфляции необходимо, чтобы $\varepsilon(t)\ll 1$ и $\eta\ll 1$. Как видно из графиков

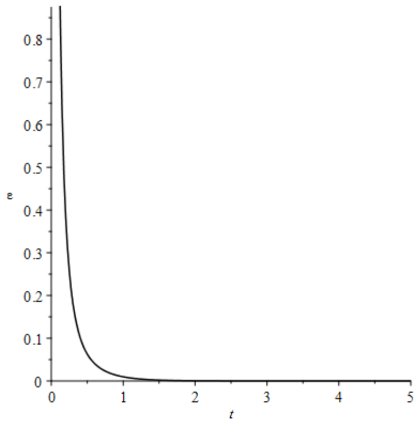

Рисунок 3 – Наклон потенциала

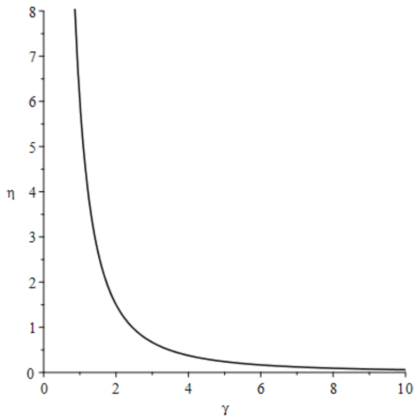

Рисунок 4 – Кривизна потенциала η

5 и 6, параметры медленного скатывания удовлетворяют этому условию.

Заключение. Много теорий пытаются объяснить текущее ускоренное расширение Вселенной, и хотя они в основном согласуются с текущими наблюдательными данными, их теоретическое обоснование не завершено. Существует несколько альтернативных теорий, но в каждой из них есть нерешенные проблемы. В этой статье мы исследовали $f(R)$ - гравитацию, которая может приводить к ускоренному расширению Вселенной без введения темной энергии. Выбрали обобщение для функции $f(R)$, предложенное А.А. Старобинским совместно с полем Максвелла и k-эссенцией. Исследовали экспоненциальное расширение Вселенной, задав экспоненциальную зависимость масштабного фактора от космологического времени. Найденная функция скалярного поля с течением времени медленно уменьшается, параметры меденного скатывания намного меньше единицы. Из этого следует, что введенные в действия скалярное и максвелловское поля являются ответственными за более ускоренный режим развития ранней Вселенной, т.е возникновение инфляции.

Список литературы

1 Блинников С.И., Долгов А.Д. Космологическое ускорение // Успехи физических наук. - 2019. - Vol. 189,6. - С. 561-602.

2 Рубаков В.А. Темная энергия во Вселенной //Успехи физическихнаук. - 2010. - Vol. 181. - С. 4-12.

3 Болотин Ю.Л., Ерохин Д.А., Лемец О.А. Расширяющаяся Вселенная: замедление или ускорение? // Успехи физических наук. - 2012. - Т. 18. - № 9. - С. 941-986.

4 Linder E.V. Einstein's Other Gravity and the Acceleration of the Universe // Physical Review D. – 2010. – Vol. 81. - № 12. – P. 7301.

5 Avsanajanishvili O. Cosmological model of dark energy: theory and observations [arXiv:1909.00366]. [Электронный ресурс] - URL: https://arxiv.org/pdf/1909.00366.pdf. (дата обращения: 15.03.2021)

6 Riess A.G., Filippenko A.V., Challis P., Clocchiattia A., Diercks A., Garnavich P.M., Hogan C.J., Jha S., Kirshner R.P., Leibundgut B., Phillips M.M., Reiss D., Shmidth B.P., Schommer R.A., Smith R.Ch., Spyromilio J., Stubbs Ch., Suntzeff N.B., Tonry J. Observation Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant // Astronomical Journal. - 1998. - Vol. 116. - № 3. - P. 1009.

7 Myrzakulov R., Saez-Gomez D., Tureanu A. On the Λ CDM Universe in $f(G)$ gravity // General Relativity and Gravitation. – 2001. – Vol. 43. - № 6. – P. 1671-1684.

8 Moon T., Myung Yu.S., Son E.J. $f(R)$ black holes // General Relativity and Gravitation. – 2011. – Vol. 43. – P. 3079.

9 Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Теория поля. Серия: «Теоретическая физика» том II. - Москва, 1998. - 504 с.

Н.Б. Нұржау, О.В. Разина

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Скалярлы және Максвеллиан өрістерінен алынған модификацияланған экспоненциалды модель динамикасы

Аннотация. Біз біртекті изотропты және жазық Фридман - Робертсон - Уолкер әлемін қолдана отырып, $f(R)$ - гравитацияны Максвелл типіндегі өріс пен k-эссенциямен зерттедік. Біз осы модель үшін қозғалыс теңдеулерін таптық, масштабтық факторы мен скаляр өрісінің функциясы, сонымен қатар скаляр өрісінің потенциалы шін шешімді есептедік. Қара энергияның тығыздығын және қысымды анықтадық, баяу жылжу параметрлерін зерттедік. Бұл модель үшін әлеуеттің көлбеуі мен қисықтығы баяу жылжу параметрлері деп аталатын әлеуеттің көлбеуі мен қисықтығы инфляцияның басталу шартын қанағаттандырады. Біздің модель инфляция кезінде Әлемнің жедел кеңеюін алуға м?мкіндік береді. Уақыт өте келе өріс азаяды, баяу төмендейді және Әлем Ғаламның кеңею заңының экспоненциалды динамикасын көрсететін инфляциялық режимнен шығады.

Түйін сөздер: $f(R)$ – гравитация, k-эссенция, Максвелл өрісі, Әлемнің жедел кеңеюі, скаляр өрісі, инфляция.

N.B. Nurzhau, O.V. Razina

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

Dynamics of the modified exponential model inspired by scalar and Maxwellian field

Abstract. The authors have investigated $f(R)$ - gravity with a Maxwell-type field and k-essence using a homogeneous isotropic and flat Friedman - Robertson - Walker Universe. The authors have found the equations of motion for this model, calculated the solution for the scale factor and the function of the scalar field, as well as for the potential of the scalar field. The article identifies the dark energy density and pressure, investigated the parameters of slow rolling. For this model, the slope and curvature of the potential, otherwise called slow roll-off parameters, satisfy the condition for inflation to occur. Our model allows us to obtain the accelerated expansion of the Universe during the period of inflation. Over time, the field decreases, slowly decreases, and the Universe comes out of the inflationary regime, which demonstrates the exponential dynamics of changes in the law of expansion of the Universe.

Keywords: $f(R)$ - gravity, k-essence, Maxwell's field, accelerated expansion of the Universe, scalar field, inflation.

References

1 Blinnikov S.I., Dolgov A.D. Kosmologocheskoe uskoreniye, Uspekhi fizicheskikh nauk [Cosmological acceleration, Advances in physical sciences], 6(189), 561-602 (2019). [in Russian]
2 Rubakov V.A. Temnaya energiya vo Vselennoy, Uspekhi fizicheskikh nauk [Dark energy in the Universe, Advances in physical sciences], 181, 4-12 (2010). [in Russian]
3 Bolotin YU.L., Yerokhin D.A., Lemets O.A. Rasshiryayushchayasya Vselennaya: zamedleniye ili uskoreniye? Uspekhi fizicheskikh nauk [Expanding Universe: Deceleration or Acceleration? Advances in physical sciences], 9(18), 941-986 (2012). [in Russian]
4 Linder E.V. Einstein's Other Gravity and the Acceleration of the Universe, Physical Review D., 12(81), 7301 (2010).
5 Avsanajanishvili O. Cosmological model of dark energy: theory and observations, [arXiv:1909.00366]. [Electronic resource] - Available at: https://arxiv.org/pdf/1909.00366.pdf. (Accessed: 15.03.2021).
6 Riess A.G., Filippenko A.V., Challis P., Clocchiattia A., Diercks A., Garnavich P.M., Hogan C.J., Jha S., Kirshner R.P., Leibundgut B., Phillips M.M., Reiss D., Shmidth B.P., Schommer R.A., Smith R.Ch., Spyromilio J., Stubbs Ch., Suntzeff N.B., Tonry J. Observation Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant, Astronomical Journal, 3(116), 1009 (1998).
7 Myrzakulov R., Saez-Gomez D., Tureanu A. On the Λ CDM Universe in $f(G)$ - gravity, General Relativity and Gravitation, 6(43), 1671-1684 (2001).
8 Moon T., Myung Yu.S., Son E.J. $f(R)$ black holes, General Relativity and Gravitation, 43, 3079 (2011).
9 Landau L.D. Lifshits Ye.M. Teoriya polya, Seriya: «Teoreticheskaya fizika» [Field theory, Series: "Theoretical Physics"] (Moscow, 1998, 504 p.). [in Russian]

Сведения об авторах:

Нуржау Н.Б. - ***основной автор***, магистрант 1-го курса специальности «Физика» физико-технического факультета, Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, ул. Кажымукана, 11, Нур-Султан, Казахстан.

Разина О.В. - Ассоциированный профессор, PhD, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, ул. Кажымукана, 11, Нур-Султан, Казахстан.

Nurzhau N.B. - ***The main author***, the 1^{st} year student in Physics, Physics and Technology Department, L.N. Gumilyov Eurasian National University, 11, Kazhymukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan.

Razina O.V. - Associate professor, PhD, L.N. Gumilyov Eurasian National University, 11, Kazhymukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan.