ӘОК 524.834

# АФФИН ГЕОМЕТРИЯСЫНДАҒЫ ЕКІ СКАЛЯРЛЫҚ ӨРІСТІ СИММЕТРИЯЛЫ ТЕЛЕПАРАЛЛЕЛДІ ГРАВИТАЦИЯСЫ ҮШІН НЕТЕР СИММЕТРИЯСЫ

**Тынымова Фаруза Мухтаровна**[1]**, Мырзакулова Шамшырак Ансатбаевна**[2]
faruza.mukhtarovna02@gmail.com, shamyrzakulova@gmail.com
[1] Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ, Жалпы және теориялық физика кафедрасының магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
[2] "Ratbay Myrzakulov Eurasian International Centre for Theoretical Physics" кіші ғылыми қызметкері, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Н.А. Мырзакулов

Қазіргі кезде Ғаламның үдемелі ұлғаюы – космологиядағы ең зерттелетін және өзекті мәселелердің бірі болып табылады. Осы ұлғаюды зерттеу барысында көптеген космологиялық модельдер ұсынылуды. Бұл модельдердің көбісі Римандық кеңістік-уақытында қарастырылуда. Бірақ соңғы уақыттарда Римандық емес кеңістік уақытындағы зерттеулер қызығушылық білдіруде. Соның бірі метрикалық емес скалярына тәуелді $f(Q)$ гравитациясы. Бұл гравитацияның көптеген қасиеттері зерттеліп, зерделенуде. Енді біз $f(Q)$ гравитациясы геометрикалық шолу жасаймыз [1-4]. Бұл жерде біз симметриялы телепараллель гравитация үшін әсер осы өрнекпен анықталатындығын қарастырдық

$$S=\int \frac{1}{2} f(Q)\sqrt{-g}\, d^4x + \int L_m \sqrt{-g}\, d^4x \tag{1}$$

мұндағы $f$ функциясы Q скалярына тәуелді функция болып табылады. Ал $g$ болса $g_{\mu\nu}$ метрикасының анықтауышы, $L_m$ Лагранжиан материясының тығыздығы.

Метрикалық емес тензорды және оның іздерін келесідей жазуға болады

$$Q_{\lambda\mu\nu} = \nabla_\lambda g_{\mu\nu} \tag{2}$$

$$Q_\alpha = Q_\alpha{}^{\mu}{}_{\mu}, \widetilde{Q}_\alpha = Q^{\mu}{}_{\alpha\mu} \tag{3}$$

Сонымен қатар, метрикалық емес тензор көмегімен суперпотенциалды жаза аламыз

$$P^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left[-Q^{\alpha}{}_{\mu\nu} + 2Q_{(\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu)} + Q^{\alpha} g_{\mu\nu} - \widetilde{Q}^{\alpha} g_{\mu\nu} - \delta^{\alpha}_{(\mu} Q_{\nu)}\right] \tag{4}$$

мұндағы метрикалық емес тензор ізі келесі түрге ие

$$Q = -Q_{\alpha\mu\nu} P^{\alpha\mu\nu} \tag{5}$$

Тағы да, кеңістіктік - уақыттың сұйықтықтық сипаттамасы үшін энергия- импульс тензоры бойынша анықтау келесі формуламен жүзеге асады.

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\left(\sqrt{-g}\,L_m\right)}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{6}$$

Енді қозғалыс теңдеуін $g_{\mu\nu}$ метрикалық тензорға қатысты (1) әсерді өзгерте отырып жазуға болады

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \nabla_{\gamma}\left(\sqrt{-g}\, f_Q P^{\gamma}{}_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f + f_Q\left(P_{\mu\gamma i} Q_{\nu}{}^{\gamma i} - 2Q_{\gamma i\mu} P^{\gamma i}{}_{\nu}\right) = -T_{\mu\nu}, \tag{7}$$

мұндағы $f_Q = \frac{df}{dQ}$. Бұл мақалада Фридман-Робертсон-Уокер атты жазық кеңістік-уақытынын қарастырамыз

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \tag{8}$$

мұндағы $a(t)$ Ғаламның масштабты факторы болып табылады. Осы сызықтық элемент үшін метрикалық емес тензордың ізі келесі түрге ие болады.

$$Q = 6H^2. \tag{9}$$

Фридман-Робертсон-Уокер метрикасы үшін қозғалыс теңдеулерін аламыз

$$3H^2 = \frac{1}{2f_Q}\left(-\rho + \frac{f}{2}\right), \tag{11}$$

$$\dot{H} + 3H^2 + \frac{\dot{f}_Q}{f_Q} H = \frac{1}{2f_Q}\left(\widetilde{p} + \frac{f}{2}\right), \tag{12}$$

мұндағы нүкте $t$ уақыт бойынша туындыны білдіреді. Сондай-ақ, (11) және (12) теңдеуін пайдаланып, келесі теңдеулерді таба аламыз

$$\rho = \frac{f}{2} - 6H^2 f_Q \tag{13}$$

$$p=\left(\dot{H}+3H^2+\frac{\dot{f}_Q}{f_Q}H\right)2f_Q-\frac{f}{2}+3\lambda H \tag{14}$$

Енді $f(Q)$ гравитациясымен екі скалярлық өріспен минималды емес байланысқан моделін қарастырамыз. Бұл модель үшін әсерді келесідей жазамыз [3-5]

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\{[F(\phi)+G(\chi)]f(Q)+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-V(\phi)+\frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi-W(\phi,\chi)\}+S_m, \tag{15}$$

Бұл жерде, $S_m=\int d^4x\sqrt{-g}\mathrm{L}_m$ материяның жалпы өрісін сипаттай алатын әсер. Мұндағы $Q$ метрикалық емес скаляр, $F(\phi)$, $G(\chi)$ - скаляр өріспен гравитация арасындағы байланысын сипаттай алатын функциялары болып табылады. Бұл жердегі, $V(\phi)$ өзара өзімен-өзі әрекеттесетін $\phi$ өрісінің потенциалы. Сонымен қатар $W(\phi,\chi)$ функцияся $\phi$ және $\chi$ екеуінің арасындағы байланыс потенциалын сипаттай алады.

Сәйкесінше, біз әсерді (16) нүктелі Лагранжиан ретінде жаза аламыз.

$$\begin{aligned}\mathrm{L}=&a^3f_QQ(F+G)-a^3f(F+G)+6f_{QQ}Qa^2\dot{a}(F+G)+6f_Q\dot{a}^2a(F+G)+6f_Q\dot{a}a^2(\frac{dF}{d\phi}\dot{\phi}+\frac{dG}{d\chi}\dot{\chi})\\&-a^3\{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2-V+\frac{1}{2}\dot{\chi}^2-W\}+\rho_m^0,\end{aligned} \tag{16}$$

Эйлер-Лагранжиан теңдеуінің көмегімен $a$, $\phi$ және $\chi$, жағдайлары үшін қозғалыс теңдеулерін алатын боламыз.

Сонымен $a$ үшін

$$2\dot{H}+3H^2=-\frac{p+(f-f_QQ+2f_{QQQ}\dot{Q}^2+2f_{QQ}\ddot{Q}+4f_{QQ}QH)(F+G)+4f_{QQ}Q((\frac{dF}{d\phi}\dot{\phi}+\frac{dG}{d\chi}\dot{\chi})}{2f_Q(F+G)}, \tag{17}$$

$\phi$ үшін:

$$f_QQ\frac{dF}{d\phi}-f\frac{dF}{d\phi}+\ddot{\phi}+3H\dot{\phi}-6f_Q(\dot{H}+2H^2)\frac{dF}{d\phi}+\frac{dV}{d\phi}+\frac{\partial W}{\partial\phi}=0, \tag{18}$$

$\chi$ үшін:

$$f_QQ\frac{dG}{d\chi}-f\frac{dG}{d\chi}+\ddot{\chi}+3H\dot{\chi}-6f_Q(\dot{H}+2H^2)\frac{dG}{d\chi}+\frac{\partial W}{\partial\chi}=0, \tag{19}$$

Сондай-ақ, Эйлер-Лагранж теңдеуінің нөлдік энергия шартына байланысты Фридманның екінші теңдеуін ала аламызп, нөлге теңестіріп аламыз:

$$H^2=\frac{\rho+f_QQ(F+G)-f(F+G)+6f_{QQ}\dot{Q}H(F+G)}{6(F+G)f_Q}. \tag{20}$$

Жоғарыда көрсетілген теңдеулердегі $H = \dot{a}/a$ шамасы Хаббл параметрі болып табылады. Теңдеулердегі тығыздық $\rho = \rho_m + \rho_\phi + \rho_\chi$ және қысым $p = p_\phi + p_\chi$ келесідей анықталады:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V - 6f_Q H \frac{dF}{d\phi}\dot{\phi}, \tag{21}$$

$$\rho_\chi = \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + W - 6f_Q H \frac{dG}{d\chi}\dot{\chi}, \tag{22}$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V + 2f_Q(\frac{dF}{d\phi}\ddot{\phi} + 2H\frac{dF}{d\phi}\dot{\phi} + \frac{d^2F}{d\phi^2}\dot{\phi}^2), \tag{23}$$

$$p_\chi = \frac{1}{2}\dot{\chi}^2 - W + 2f_Q(\frac{dG}{d\chi}\ddot{\chi} + 2H\frac{dG}{d\chi}\dot{\chi} + \frac{d^2G}{d\chi^2}\dot{\chi}^2). \tag{24}$$

Жалпы энергия импульс тензоры өрістердің келесідей энергия-импульс теңдеулерін қамтиды. Олар $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \nabla_\mu T_m^{\mu\nu} + \nabla_\mu T_\phi^{\mu\nu} + \nabla_\mu T_\chi^{\mu\nu}$. Сақталу заңына сәйкес, $\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$ сәйкес төмендегі теңдеулер арқылы тиісінше қысымдары анықталды:

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = -f_Q Q\frac{dF}{d\phi}\dot{\phi} + Q\frac{dF}{d\phi}\dot{\phi} - \frac{\partial W}{\partial\phi}\dot{\phi} + \frac{(dF/d\phi)\dot{\phi}}{F+G}\rho, \tag{25}$$

$$\dot{\rho}_\chi + 3H(\rho_\chi + p_\chi) = -f_Q Q\frac{dG}{\chi}\dot{\chi} + Q\frac{dG}{d\chi}\dot{\chi} + \frac{(dG/d\chi)\dot{\chi}}{F+G}\rho, \tag{26}$$

Бұл жердегі $q_i$ координатасының $\alpha_i$ -жалпы функциясы. Нетер симметриясымен байланысқан, $X$ арқылы пайда болатын қозғалыс тұрақтысы Нетер симметриясымен байланысу арқылы төмендегіні береді:

$$M_0 = \alpha_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{27}$$

Енді осы модельге Нетер симметриясының қолданылу шарты $L_x L = XL = 0$ Лагранжиан үшін қолданылады және векторлық өріс төмендегідей жазылады:

$$X = \alpha\frac{\partial}{\partial a} + \beta\frac{\partial}{\partial\phi} + \gamma\frac{\partial}{\partial\chi} + \delta\frac{\partial}{\partial Q} + \frac{\partial\alpha}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\dot{a}} + \frac{\partial\beta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\dot{\phi}} + \frac{\partial\gamma}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\dot{\chi}} + \frac{\partial\delta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\dot{Q}}, \tag{28}$$

мұндағы $\alpha$, $\beta$ және $\gamma$, $\delta$ деп ($a$, $\phi$, $\chi$, $R$) функцияларын атаймыз. Бұл жағдайда жүйеге сүйене отырып, дифференциалдық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$f_Q(F+G)(\alpha + 2a\frac{\partial\alpha}{\partial a}) + af_Q\frac{dF}{d\phi}(\beta + a\frac{\partial\beta}{\partial a}) + af_Q\frac{dG}{d\chi}(\gamma + a\frac{\partial\gamma}{\partial a}) + af_{QQ}(F+G)(\delta + a\frac{\partial\delta}{\partial a}) = 0, \tag{29}$$

$$3\alpha - 12 f_Q \frac{dF}{d\phi}\frac{\partial\alpha}{\partial\phi} + 2a\frac{\partial\beta}{\partial\phi} = 0, \tag{30}$$

$$3\alpha - 12 f_Q \frac{dG}{d\chi}\frac{\partial\alpha}{\partial\chi} + 2a\frac{\partial\gamma}{\partial\chi} = 0, \tag{31}$$

$$\begin{aligned} &a\beta f_Q \frac{d^2F}{d\phi^2} + f_Q\left(2\alpha + a\frac{\partial\alpha}{\partial a} + a\frac{\partial\beta}{\partial\phi}\right)\frac{dF}{d\phi} + af_Q\frac{\partial\gamma}{\partial\phi}\frac{dG}{d\chi} + \\ &2f_Q\frac{\partial\alpha}{\partial\chi}(F+G) - \frac{a^2}{6}\frac{\partial\gamma}{\partial a} + \delta f_{QQ}a\frac{dG}{d\chi} + af_{QQ}\frac{\partial\delta}{\partial\chi}(F+G) = 0 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} &a\gamma\frac{d^2G}{d\chi^2} + f_Q\left(2\alpha + a\frac{\partial\alpha}{\partial a} + a\frac{\partial\gamma}{\partial\chi}\right)\frac{dG}{d\chi} + af_Q\frac{\partial\beta}{\partial\chi}\frac{dF}{d\phi} + \\ &+2f_Q\frac{\partial\alpha}{\partial\chi}(F+G) - \frac{a^2}{6}\frac{\partial\gamma}{\partial a} + \delta f_{QQ}a\frac{dG}{d\chi} + af_{QQ}\frac{\partial\delta}{\partial\chi}(F+G) = 0, \end{aligned} \tag{33}$$

$$f_Q\frac{\partial\alpha}{\partial\phi}\frac{dG}{d\chi} + f_Q\frac{\partial\alpha}{\partial\chi}\frac{dF}{d\phi} - \frac{a}{6}\left(\frac{\partial\beta}{\partial\chi} + \frac{\partial\gamma}{\partial\phi}\right) = 0, \tag{34}$$

Ендігі мақсатымыз (30)- (35) дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімі анықтаймыз.

$$\begin{aligned} &\alpha = \alpha_0 a, \beta = \beta_0 e^Q, \gamma = -3\alpha_0\phi/2, F = F_0 e^{-\mu\varphi}, G = G_0\phi^2, \\ &V = V_0 e^{-\mu\varphi}, W = f(\phi e^{\frac{\mu\varphi}{2}})e^{-\mu\varphi} \end{aligned} \tag{35}$$

Бұл шешімдер Нетер симметриясы шартына сай, сонымен қатар теңдеулер жүйесін толығымен қанағаттандырады. Алдағы уақытта космологиялық шеешімдерді анықтауда орасан зор көмегін тигізеді.

*Бұл жұмыс ҚР БҒМ AP09058240 гранттық жобасы қаржыландыру аясында орындалды.*

**Қолданылған әдебиеттер тізімі**


1. J.B. Jiménez, L.Heisenberg, T. Koivisto. Coincident General Relativity // Physical Review D. 2018. Vol.98. №4. P. 044048.
2. S.Mandal, P. K. Sahoo, J. R. L. Santos. Energy Conditions in f(Q) gravity // Physical Review D. 2020. Vol.102. №2. P. 024057.
3. N. Frusciante. Signatures of f(Q)-gravity in cosmology // Physical Review D. 2021. Vol.103. №4. P. 044021
4. S.Mandal, D.Wang, P.K. Sahoo. Cosmography in f(Q) gravity // Physical Review D. 2020. Vol.102. №12. P. 124029.
5. R.C. de Souza, G.M. Kremer. Dark Sector from Interacting Canonical and Non-Canonical Scalar Fields // Classical and Quantum Gravity. 2010. Vol.27. №17. P. 175006.