ӘОЖ 517.957, 532.5

ЖАЛПЫЛАНҒАН СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ШРЕДИНГЕР ТЕҢДЕУІН ТАНГЕНС-КОТАНГЕНС ӘДІСІМЕН ЗЕРТЕУ

Самғар Даулет
Samgar.daulet@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ «6В60400-физика» мамандығының
4-курс студенті , Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекші- Шайхова Г. Н.

Дербес туынды дифференциалдық теңдеулердің нақты шешімдерін зерттеу гидродинамика, сұйық механика, конденсацияланған физика, плазма физикасы, оптика және т. б. сияқты көптеген физика құбылыстарында маңызды рөл атқарады. Якобидің эллиптикалық әдісі [1], (G'/G)- ыдырау әдісі [2], Exp-функция әдісі [3], tanh-функция әдісі [4], Дарбу түрлендіру әдісі [5] сияқты көптеген тиімді және қуатты әдістер құрастырылды және жетілдірілді.

Бұл жұмыста жалпыланған сызықты емес Шредингер теңдеуін зерттейміз

$$q_z = i\left(q_{tt} + 2|q|^2 q + \alpha q\right) + \gamma q_t. \tag{1}$$

(1) теңдеу физика-математикалық қосымшалары бар солитон теңдеуі, мұнда α күшейту немесе сіңіруді білдіреді, ал γ топтық жылдамдықты білдіреді [6,7].

Бұл жұмыстың мақсаты (1) теңдеудің қозғалмалы толқындық шешімдерін құру. Біз (1) теңдеуді тангенс-котангенс әдісімен зерттейміз, ол кеңінен зерттелген және сызықты емес есептердің кең спектрінде кеңінен қолданылады.

1. Тангенс-Котангенс әдісінің сапаттамасы

Сызықты емес дербес туынды дифференциалдық теңдеуді қарастырамыз

$$F\left(u, u_z, u_t, u_{zz}, u_{tt}, ...\right) = 0 \tag{2}$$

мұндағы $u(z,t)$- (2)–ші сызықты емес дербес туынды дифференциалдық теңдеудің қозғалатын толқынының шешімі. Біз келесі түрлендіруді қолданамыз,

$$u(z,t) = f(\xi) \tag{3}$$

мұндағы $\xi = z - ct$. Бұл бізге келесі өзгерістерді қолдануға мүмкіндік береді:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\cdot) = -c\frac{d}{d\xi}(\cdot),\ \ \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) = \frac{d}{d\xi} \tag{4}$$

Сызықты емес дербес туынды дифференциалдық теңдеуді (2) сызықты емес қарапайым дифференциалдық теңдеуге аудару үшін (4) теңдеулерді қолданамыз

$$Q\left(f', f'', f''', ...\right) = 0 . \tag{5}$$

Содан кейін қарапайым дифференциалдық теңдеу (5) барлық мүшелерде интегралдау тұрақтыларын елемейтін туындылар болған кезде біріктіріледі. Көптеген сызықты емес теңдеулердің шешімдері келесі түрде көрсетілуі мүмкін:

$$f(\xi)=\alpha\tan^{\beta}(\mu\xi),\ \ |\xi|\le\frac{\pi}{2\mu}$$

немесе

$$f(\xi)=\alpha\cot^{\beta}(\mu\xi),\quad |\xi|\le\frac{\pi}{2\mu} \tag{6}$$

мұндағы α, μ және β-анықталатын параметрлер, μ және c-сәйкесінше толқын саны мен толқын жылдамдығы. Біз қолданамыз

$$\begin{aligned} f(\xi)&=\alpha\tan^{\beta}(\mu\xi)\\ f'(\xi)&=\alpha\beta\mu\left[\tan^{\beta-1}(\mu\xi)+\tan^{\beta+1}(\mu\xi)\right]\\ f''(\xi)&=\alpha\beta\mu^{2}\left[(\beta-1)\tan^{\beta-2}(\mu\xi)+2\beta\tan^{\beta}(\mu\xi)+(\beta+1)\tan^{\beta+2}(\mu\xi)\right]\end{aligned} \tag{7}$$

және олардың туындылары. Немесе

$$\begin{aligned} f(\xi)&=\alpha\cot^{\beta}(\mu\xi)\\ f'(\xi)&=-\alpha\beta\mu\left[\cot^{\beta-1}(\mu\xi)+\cot^{\beta+1}(\mu\xi)\right]\\ f''(\xi)&=\alpha\beta\mu^{2}\left[(\beta-1)\cot^{\beta-2}(\mu\xi)+2\beta\cot^{\beta}(\mu\xi)+(\beta+1)\cot^{\beta+2}(\mu\xi)\right]\end{aligned} \tag{8}$$

және олай бұдан әрі. Біз (7) немесе (8) келтірілген теңдеуге (5) ауыстырамыз, tan функциясының мүшелерін (7) немесе cot функциясының мүшелерін (8) қолданған кезде теңестіреміз және алынған алгебралық теңдеулер жүйесін компьютерленген символдық пакеттердің көмегімен шешеміз. Содан кейін біз $\tan^{k}(\mu\xi)$ немесе $\cot^{k}(\mu\xi)$- де бірдей қуаттағы барлық мүшелерді жинаймыз және белгісіз α, μ және β арасында алгебралық теңдеулер жүйесін алу үшін олардың коэффициенттерін нөлге тең етіп орнатамыз және кейінгі жүйені шешеміз.

2 Тангенс-Котангенс әдісін қолдану

Жалпыланған сызықты емес Шредингер теңдеуін қарастырамыз (1). Түрлендіру арқылы

$$q=e^{i(az+dt)}Q(z,t). \tag{9}$$

(1)-ші теңдеуді ауыстыруға болады

$$iaQ+Q_z+id^2Q+2dQ_t-iQ_{tt}-2iQ^3-i\alpha Q-id\gamma Q-\gamma Q_t=0. \tag{10}$$

(10)-ші теңдеудегі нақты және жорама бөліктерін бөлу арқылы біз келесі жүйені аламыз

$$Q_z+2dQ_t-\gamma Q_t=0, \tag{11}$$

$$Q\left(a+d^2-\alpha-\gamma d\right)-c^2Q''-2Q^3=0. \tag{12}$$

Толқындық түрлендіруді ауыстыру арқылы

$$Q(z,t)=Q(\xi)=Q(z-ct). \tag{13}$$

(11)-(12) теңдеулер жүйесінде мынаны аламыз

$$Q'(1-2d-\gamma c)=0\,, \qquad (14)$$

$$Q\left(a+d^2-\alpha-\gamma d\right)-c^2Q''-2Q^3=0 \ . \qquad (15)$$

(14) теңдеуінен табуға болады

$$c=\frac{1}{2d-\gamma} \qquad (16)$$

Сонымен, біз (15)-ші қарапайым дифференциалдық теңдеуді зерттейміз

$$Q\left(a+d^2-\alpha-\gamma d\right)-c^2Q''-2Q^3=0 \qquad (17)$$

(17)-ші теңдеуді тангенс-котангенс әдісімен шешуге болады.

2.1 Тангенс әдісі

Әдіске сәйкес (17) теңдеудің тангенс шешімін түрлендіру арқылы табуға болады

$$Q=\alpha\tan^{\beta}(\mu\xi). \qquad (18)$$

Біз (18)-ші теңдеуді және оның екінші ретті туындысын қолданамыз

$$Q''=\alpha\beta\mu^2\left[(\beta-1)\tan^{\beta-2}(\mu\xi)+2\beta\tan^{\beta}(\mu\xi)+(\beta+1)\tan^{\beta+2}(\mu\xi)\right] \qquad (19)$$

және (18) және (19) теңдеулерді (17)-ші теңдеудің орнына қойу арқылы аламыз:

$$\alpha\tan^{\beta}(\mu\xi)\left(a+d^2-\alpha-\gamma d\right)-c^2\alpha\beta\mu^2\left[(\beta-1)\tan^{\beta-2}(\mu\xi)+2\beta\tan^{\beta}(\mu\xi)+(\beta+1)\tan^{\beta+2}(\mu\xi)\right]-$$
$$2\alpha^3\tan^{3\beta}(\mu\xi)=0$$

(20)

(20)-ші теңдеуден β табамыз:

$$\beta+2=3\beta\Rightarrow\beta=1 \qquad (21)$$

(21)-ші теңдеуден шыққан мәнді (20)-ші теңдеуге қойу арқылы келесі теңдеуді аламыз

$$\begin{aligned}&\alpha\tan^{1}(\mu\xi)\left(a+d^2-\alpha-\gamma d\right)-c^2\alpha\mu^2\left[2\tan^{1}(\mu\xi)+2\tan^{3}(\mu\xi)\right]-\\&2\alpha^3\tan^{3}(\mu\xi)=0\end{aligned} \qquad (22)$$

(22)-ші теңдеуінен келесі жүйені аламыз

$$\tan^{1}(\mu\xi):\qquad \alpha\left(a+d^2-\alpha-\gamma d\right)-2c^2\alpha\mu^2=0\ ; \qquad (23)$$
$$\tan^{3}(\mu\xi):\qquad -2c^2\alpha\mu^2-2\alpha^3=0\ . \qquad (24)$$

(23)-ші теңдеуден табамыз

$$\mu = \pm\frac{1}{c}\sqrt{\frac{\left(a + d^2 - \alpha - \gamma d\right)}{2}} \;; \tag{25}$$

және (24)-ші теңдеуден аламыз

$$\alpha = \pm i\sqrt{\frac{\left(a + d^2 - \alpha - \gamma d\right)}{2}} \;. \tag{26}$$

(25) және (26) теңдеулерді (18)-ші теңдеуге қойып, содан кейін алынған өрнекті (9)-шы теңдеуге қойсақ, тангенс шешім алынады

$$q_1(z,t) = \pm i e^{i(az+dt)}\sqrt{\frac{\left(a + d^2 - \alpha - \gamma d\right)}{2}}\tan\left(\frac{1}{c}\sqrt{\frac{\left(a + d^2 - \alpha - \gamma d\right)}{2}}\left(z - ct\right)\right) , \tag{27}$$

мұнда $c = \dfrac{1}{2d - \gamma}$.

2.2 Котангенс әдісі

Әдіске сәйкес (17)-ші теңдеудің котангенс шешімін келесі түрлендіру арқылы табуға болады

$$Q = \alpha\cot^{\beta}\left(\mu\xi\right) \tag{28}$$

және оның екінші ретті туындысын қолданамыз

$$Q^{''} = \alpha\beta\mu^2\left[\left(\beta - 1\right)\cot^{\beta-2}\left(\mu\xi\right) + 2\beta\cot^{\beta}\left(\mu\xi\right) + \left(\beta + 1\right)\cot^{\beta+2}\left(\mu\xi\right)\right] \tag{29}$$

және (28) ,(29) теңдеулерді (17)-ші теңдеудің орнына қойу арқылы аламыз

$$\begin{gathered}\alpha\cot^{\beta}\left(\mu\xi\right)\left(a + d^2 - \alpha - \gamma d\right) - c^2\alpha\beta\mu^2\left[\left(\beta - 1\right)\cot^{\beta-2}\left(\mu\xi\right) + 2\beta\cot^{\beta}\left(\mu\xi\right) + \left(\beta + 1\right)\cot^{\beta+2}\left(\mu\xi\right)\right] - \\ 2\alpha^3\cot^{3\beta}\left(\mu\xi\right) = 0\end{gathered} \tag{30}$$

(30)-шы теңдеуден β табамыз:

$$\beta + 2 = 3\beta \Rightarrow \beta = 1 \tag{31}$$

(31)-ші теңдеуден шыққан мәнді (30)-шы теңдеуге қойу арқылы аламыз:

$$\begin{gathered}\alpha\cot^{1}\left(\mu\xi\right)\left(a + d^2 - \alpha - \gamma d\right) - c^2\alpha\mu^2\left[2\cot^{1}\left(\mu\xi\right) + 2\cot^{3}\left(\mu\xi\right)\right] - \\ 2\alpha^3\cot^{3}\left(\mu\xi\right) = 0\end{gathered} \tag{32}$$

(32)-ші теңдеуінен келесі жүйені аламыз

$$\cot^{1}\left(\mu\xi\right); \alpha\left(a + d^2 - \alpha - \gamma d\right) - 2c^2\alpha\mu^2 = 0 \Rightarrow \mu = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\left(a + d^2 - \alpha - \gamma d\right)}{2}} \tag{33}$$

$$\cot^3(\mu\xi); -2c^2\alpha\mu^2 - 2\alpha^3 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = -c^2\mu^2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{-(a+d^2-\alpha-\gamma d)}{2}} \tag{34}$$

(33)-ші -теңдеу береді

$$\mu = \pm\frac{1}{c}\sqrt{\frac{(a+d^2-\alpha-\gamma d)}{2}}, \tag{35}$$

және біз (34)-ші теңдеуден аламыз

$$\alpha = \pm i\sqrt{\frac{(a+d^2-\alpha-\gamma d)}{2}}\ . \tag{36}$$

(35) ,(36) теңдеулерді (28)-ші теңдеуге қойсақ, содан кейін алынған өрнекты (9)-шы теңдеуге қою арқылы , котангенс шешімін аламыз

$$q_2(z,t) = \pm ie^{i(az+dt)}\sqrt{\frac{(a+d^2-\alpha-\gamma d)}{2}}\cot\left(\frac{1}{c}\sqrt{\frac{(a+d^2-\alpha-\gamma d)}{2}}(z-ct)\right)$$

мұнда $c = \frac{1}{2d-\gamma}$.

Бұл жұмыста жалпыланған сызықты емес Шредингер теңдеуін аналитикалық зерттеу үшін тангенс-котангенс әдісі қолданылады. Бірнеше нақты шешімдер алынды. Осы әдіс көптеген сызықты емес теңдеулерге қолданылуы мүмкін.

Зерттеу жұмысы Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі Ғылым комитетінің жобасы аясында дайындалған (ЖТН жобасы: AP09057947).

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Inc, M. Periodic wave solutions for the generalized shallow water wave equation by the improved Jacobi elliptic function method / M. Inc, M. Ergut // Appl. Math. E-Notes. — 2005. — № 5. — С. 89–96.
2. Feng, J. Using (G0/G)-expansion method to seek traveling wave solution of Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation / J. Feng, W. Li, Q. Wan // Appl. Math. Comput. . — 2011. — № 217. — С. 5860–5865.
3. He, J. Exp-function method for nonlinear wave equations. / J. He, X. Wu // Chaos, Solitons Fractals . — 2006. — Т. 30. — С. 700–708.
4. Malfliet, W. The tanh method. II. Perturbation technique for conservative systems. / W. Malfliet // Phys. Scr. . — 1996. — Т. 54. — С. 569–575.
5. Darboux Transformation and Soliton Solution for the (2+1)-dimensional Complex Modifed Korteweg-de Vries Equations. / G. Bekova, Y. Yesmakhanova, R. Myrzakulov, G. Shaikhova // J.Phys.: Conference Series . — 2017. — Т. 54, № 936. — С. 012045 (1–9)..
6. Agrawal, G. P. Nonlinear Fiber Optics / G. P. Agrawal. — San Diego : Academic Press, 2001. c.
7. Allen, L. Optical Resonance and Two-Level Atoms / L. Allen, J. H. Eberly. — New York : Wiley Press, 1975. -c.