ӘОК 530.1

СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ШРЕДИНГЕР ТИПТЕС ТЕҢДЕУЛЕРІНІҢ ДИСКРЕТТІ МОДЕЛЬДЕРІ

Әубәкірова Ақмарал Нұржанқызы[1]**, Серикбаев Нұржан Сагындыкович**[2]
akmaral.abubakirova2021@mail.ru
[1]Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ Физика-техникалық факультеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
[2]«Р. Мырзақұлов атындағы Еуразия халықаралық теориялық физика орталығы» ЖШС, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі- Нугманова Г.Н

Сызықтық емес жүйелер физикалық құбылыстардың математикалық көрінісінде жиі кездеседі. Көптеген сызықтық емес теңдеулердің шешімін табу үшін бұл маңызды. Алайда, физикалық маңызды тапсырмалардың нақты қосалқы тобы, ол терең математикалық құрылымдармен шешіледі, бұл болашақта топтардыңнақты шешімдерін табуға мүмкіндік береді. Мұндай шешімдердің ерекше маңызды қосалқы класы - солитондар.Солитондар-белгілі бір мағынада серпімді болатын локализацияланған толқындардың бір-бірімен өзара әрекеттесуін болжайды. Олар физиктер және инженерлер үшін өте қызықты болды,бұл олардың ішінара локализацияланған және тұрақты сипатына байланысты болды.

Жалпы жағдайда интегралданған теңдеулердің жартылай туындыларға кез-келген үлесі интегралданбауы мүмкін.Біріктірілген жартылай дифференциалданатын теңдеулер сызықтық оператор жұбының үйлесімділік шарты болса да, жалпы жағдайда дискреттелетін сызықтық теңдеулер жұбы болмайды. Сонымен қатар, интегралданатын дискретизацияны ескере отырып – мысалы, алгоритмдік әдісі жоқдискретті жүйеден байланысқан сызықтық жұпты құру үшін сандық модельдеусолитондардың серпімді өзара әрекеттесуін болжайды[1-3].Десекте,интегралданатын дискретті бейсызықтыШредингер теңдеуі (ИДБШТ),

$$i\frac{\partial}{\partial t}\times q_n=\frac{1}{h^2}(q_{n+1}-2q_n+q_{n-1})\pm|q_n|^2\left(q_{n+1}+q_{n-1}\right) \tag{1}$$

БШ теңдеуі тікелей дискреттеу болып табылады, ол үшін ассоциацияланған операторлық жұп теңдеулерін қарастыру керек.Осы оператор жұбының көмегімен интегралданатын дискретті БШ теңдеуіүшін бастапқы шартты КШӘ арқылы анықтаймыз. КШӘ-ін біршама жалпы жүйе үшін(яғни, $-\infty \prec n \prec +\infty$),екі шартпен тұжырымдаймын.

$$i\frac{\partial}{\partial \tau}Q_n=Q_{n+1}-2Q_n+Q_{n-1}-Q_nR_n\left(Q_{n+1}+Q_{n-1}\right) \tag{2a}$$

$$-i\frac{\partial}{\partial\tau}R_n = R_{n+1} - 2R_n + R_{n-1} - Q_nR_n\left(R_{n+1} + R_{n-1}\right) \tag{2b}$$

ерекше жағдай ретінде ИДБШТ-ін (1)- қосуға болады.

Интеграцияланатын дискретті бейсызықты эволюциялық теңдеулерді құрудың бір әдісі-кеңістіктік дискретті шашырау есебі мен уақытқа тәуелділік теңдеуінің үйлесімділік шартын есептеу. Атап айтқанда, ол үшіналдымен интегралданатын жартылай дифференциалданатын теңдеулері (ЖДТ) кеңістіктік дискретизацияны құруға болады,ЖДТ-мен байланысты шашырау тапсырмасын таңдау қажет. Содан кейін, сәйкесінше шашырау параметрінің дәрежелері бойынша уақыт тәуелділігінің матрицасын кеңейту, қарапайым дифференциалдық теңдеудің (ҚДТ) үйлесімді жүйелерін алуға болады[4-5]. Шашырау мәселесінің табиғи дискретизациясы :

$$\frac{\upsilon_{n+1} - \upsilon_n}{h} = \begin{pmatrix} -ik & q_n \\ r_n & ik \end{pmatrix}\upsilon_n + O\left(h^2\right) \tag{3}$$

Мұндағы $\upsilon_n = \upsilon(nh) = \left(\upsilon_n^{(1)}, \upsilon_n^2\right)^T, q_n = q(nh),$ және $r_n = r(nh).$ Осыны ескере отырыпоны қайта жаздым,

$$\upsilon_{n+1} = \begin{pmatrix} z & Q_n \\ R_n & z^{-1} \end{pmatrix}\upsilon_{n,} \tag{4}$$

Мұндағы

$$Q_n = hq_{n,} \quad R_n = hr_n \quad z = e^{-ikh} = 1 - ikh + O\left(h^2\right),$$
$$z^{-1} = e^{ikh} = 1 + ikh + O\left(h^2\right)$$

Содан кейін $O\left(h^2\right)$-ні және одан жоғарыларын алып тастаймыз.Шашырау есебі (4) кейде Абловиц–Ладик шашырау мәселесі деп аталады.Тапсырманы ескере отырып шашырау мәселесін (4) және уақытқа тәуелділік теңдеуін жазамыз

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\upsilon_n = \begin{pmatrix} iQ_nR_{n-1} - \frac{i}{2}\left(z - z^{-1}\right)^2 & -i\left(zQ_n - z^{-1}Q_{n-1}\right) \\ i\left(z^{-1}R_n - zR_{n-1}\right) & -iR_nQ_{n-1} + \frac{i}{2}\left(z - z^{-1}\right)^2 \end{pmatrix}\upsilon_n \tag{5}$$

Дискретті үйлесімділік шартына сәйкес $\frac{\partial}{\partial\tau}\upsilon_{n+1} = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\upsilon_m\right)_{m=n+1}$ эквивалентті теңдеулер жүйесі (2а)-(2b)-те көрсетілген.ИДБШТ (1) жүйесінен (2 а)–(2 b) алу үшін, айнымалыларды келесідей өзгерту керек:

$$Q_n \to hq_n, \quad R_n \to hr_n, \quad \tau \to h^{-2}t. \tag{6}$$

Содан кейін (2 а)– (2 b) жүйелері келесідей болады:

$$i\frac{\partial}{\partial t}q_n = \frac{1}{h^2}\left(q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}\right) - q_nr_n\left(q_{n+1} + q_{n-1}\right) \tag{7a}$$

$$-i\frac{\partial}{\partial t}r_n = \frac{1}{h^2}\left(r_{n+1}-2r_n+r_{n-1}\right)-q_n r_n\left(r_{n+1}+r_{n-1}\right), \tag{7b}$$

$r_n = \mp q_n^*$ қысқартуынан ИДБШТ (1.)сәйкес келеді.

Дискретті шашырау есебінің шешімдерін (4) z параметрі бойынша меншікті функция деп атаймыз. Потенциалдар $|Q_n|,|R_n| \to 0$ кезінде $n \to \pm\infty$, меншікті функцияларыныңасимптотикалық шешімдер келесі түрде өрнектеледі,

$$\upsilon_{n+1} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}\upsilon_n.$$

Сондықтан келесідей анықталған меншікті функцияларын енгізу шекаралық шарттармен анықталады:

$$\phi_n(z) \approx z^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad \bar{\phi}_n(z) \approx z^{-n}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \text{кезінде} \quad n \to -\infty \tag{8a}$$

$$\psi_n(z) \approx z^{-n}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad \bar{\psi}_n(z) \approx z^{n}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \text{кезінде} \quad n \to +\infty. \tag{8b}$$

Келесі талдауда тұрақты шекаралық шарттары бар функцияларды қарастыру ыңғайлы. Демек, біз Йосттың функцияларын келесідей анықтаймыз:

$$M_n(z) = z^{-n}\phi_n(z), \qquad \bar{M}_n(z) = z^n\bar{\phi}_n(z) \tag{9a}$$

$$N_n(z) = z^n\psi_n(z), \qquad \bar{N}_n(z) = z^{-n}\psi_n(z). \tag{9b}$$

Егер шашырау мәселесі (4) сәйкес келетін болса,

$$\upsilon_{n+1} - \mathrm{Z}\upsilon_n = \tilde{Q}_n\upsilon_n,$$

Мұндағы

$$Z = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{Q}_n = \begin{pmatrix} 0 & Q_n \\ R_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

содан кейін Йост функциялары әртүрлі теңдеулерінің шешімдері болып табылады.

$$M_{n+1}(z) - z^{-1}ZM_n(z) = z^{-1}\tilde{Q}_n M_n(z) \tag{11a}$$

$$\bar{M}_{n+1}(z) - zZ\bar{M}_n(z) = z\tilde{Q}_n\tilde{M}_n(z) \tag{11b}$$

$$N_{n+1}(z) - zZN_n(z) = z\tilde{Q}_n N_n(z) \tag{11c}$$

$$\bar{N}_{n+1}(z) - z^{-1}Z\bar{N}_n(z) = z^{-1}\tilde{Q}_n\bar{N}_n(z) \tag{11d}$$

Енді υ_n жиынтық теңдеуді қанағаттандырса

$$\upsilon_n = \omega + \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} G_{n-k} \widetilde{Q}_k \upsilon_n \tag{12}$$

мұндағы G_n шешімі (13) және w өрнегін қанағаттандырады

$$\omega - z^{-1} Z\omega = 0, \tag{13}$$

содан кейін υ_n-айырмашылық теңдеуінің шешімі (11 a) немесе эквивалентті (11 d).болады. Гриннің функциясы ерекше емес, Грин функциясын таңдау және бірегей емес W мүшесін таңдаумен бірге Йост функциясын және оның аналитикалық қасиеттерін анықтайды. Грин функциясын нақты табу үшін алдымен құрамдас бөліктер (13) теңдеулері байланысты емес екенін анықтадым . Сондықтан диагональды емес мүшелер нөлге тең болуы мүмкін және

$$G_n = \begin{pmatrix} g^{(1)}{}_n & 0 \\ 0 & g^{(2)}{}_n \end{pmatrix}, \tag{14}$$

мұнда (13)-ке сәйкес $g_n^{(j)}$ қанағаттандыруы керек

$$g^{(j)}{}_{n+1} - b^{(j)} g^{j}{}_n = z^{-1}\delta_{0,n} \qquad j = 1,2 \tag{15}$$

$$b^{(1)} = 1, \qquad b^{(2)} = z^{-2}. \tag{16}$$

Әрі қарай, $g_n^{(j)}$ және $\delta_{0.n}$ Фурье интегралдары түрінде жазылады,

$$g^{(j)}{}_n = z^{-1}\frac{1}{2\pi i}\oint_{|p|=1} p^{n-1}\hat{g}^{(j)}\partial p. \qquad \delta_{0,n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|p|=1} p^{n-1}\partial p.$$

Солитонды шешімдері.

Солитонды шешімдер (7 a) - (7 b) рефлекторсыз потенциалдар болып табылады (яғни. $\rho(z) = \overline{\rho}(z) = 0, \quad |z = 1|$), онда меншікті мәндер төрт жиынтықтан тұрады.J-солитон шешімінің шашырау деректері мыналардан тұрады:

(i) $4J$ меншікті мәндері $\pm z_j = \pm e^{\alpha_j + i\beta_j}$ және $\pm \bar{z}_j = \pm \frac{1}{z^*}$,мұндағы $\left|z_j\right| \succ 1$және $j = 1.....,J$;

(ii) 2j-сәйкес келетін нормаланған тұрақтылар $C_j(\tau), D_j(\tau)$, мұндағы

$$D_j(\tau) = \bar{z}_j^{-2}\overline{C}_j(\tau) \tag{17}$$

және

$$C_j(0)D_j(0) \in \Re, \; C_j(0)D_j(0) \succ 0.$$

келтірілген нормаланған тұрақтылардың эволюциясында ескереміз,бұл

$$C_j(\tau)D_j(\tau) \in \Re, \quad C_j(\tau)D_j(\tau) \qquad \tau \neq 0.$$

$$Q_n(\tau) = -\frac{D_1(0)}{\left(C_1(0)D_1(0)\right)^{1/2}} e^{i(2\beta_1(n+1)-2\omega\tau)} \times \sinh(2\alpha_1)\sec h(2\alpha_1(n+1)-2\upsilon\tau-\delta) \quad (18a)$$

$$R_n(\tau) = \frac{C_1(0)}{\left(C_1(0)D_1(0)\right)^{1/2}} e^{-i(2\beta_1(n+1)-2\omega\tau)} \times \sinh(2\alpha_1)\sec h(2\alpha_1(n+1)-2\upsilon\tau-\delta), \quad (18b)$$

ИДБШТ (2 a)–(2 b) және сызықтық байланысты операторлардың жұптары (4), (5) БШ теңдеуінен және байланыстысызықтық операторлардың жұптарынан келесі қатынастарды аламыз:

$$Q_n - hq_n - hq(nh), \qquad R_n - hr_n - hr(nh), \qquad \tau = h^{-2}t, \quad (19a)$$

және

$$z_1 = e^{-ik_1h}, \qquad C_1(0) = ih\widetilde{C}_1(0), \qquad D_1(0) = -ih\widetilde{D}_1(0). \quad (19b)$$

$$q(x,t) = 2\eta c e^{-2i\xi x + 4i(\xi^2-\eta^2)t - i\psi_0} \sec h(2\eta x - 8\xi\eta t - \delta_0) \quad (20a)$$

$$r(x,t) = 2\eta c^{-1} e^{2i\xi x - 4i(\xi^2-\eta^2)t + i\psi_0} \sec h(2\eta x - 8\xi\eta t - \delta_0) \quad (20b)$$

$$\delta_0 = \log\left(\widetilde{C}_1(0)\widetilde{D}_1(0)\right)^{\frac{1}{2}} - \log 2\eta, \qquad \psi_0 = \arg\widetilde{C}_1(0) - \frac{\pi}{2}, \quad (21)$$

ИДБШТ бұл үздіксіз мәселенің бірсолитонды шешімі (2 а) - (2 б). Осындай нәтиже мультисолитті шешімдер үшін де орын алады. ИДБШТ теңдеуі (1) редукцияда алынады $r_n = \mp q^*{}_n$.

Қорытындылай келе, мен дискретті солитондар мен солитондардың кейбір айырмашылықтарына назар аударып,жартылай туынды дифференциалдық теңдеулермен ИДБШ теңдеулерін шештім.Олар (19 a)–(19 b) және (20 a) - (20 b)күрделі тасымалдаушы толқынмен модуляцияланған секпрофильді толқындардан тұрады. Сонымен қатар, ЖДТ-де де, торлы солитонда да жұмыс істейтін толқынның жылдамдығы кеңістіктік жиілігіне байланысты екенін дәлелдедім.

Бұл зерттеуді ҚР БҒМ қаржыландырды, IRN AP08857372.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Ablowitz M. J., Nonlinear evolution equations – continuous and discrete, SIAM Rev. 19 (1977) 663
2. Ablowitz M. J. and Segur H., Solitons and the inverse scattering transform, SIAM 4 (1981)
3. Braun O. M., Kivshar Y. S., Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model, Phys. Rep. 306 (1998)
4. Briggs C. S., Topics in Nonlinear Mathematics, PhD Thesis, Clarkson College of Technology (1983)
5. Bruschi M., On a new integrable hamiltonian system with nearest-neighbor interaction, Inv. Probl. 5 (1989) 983–998