ӘОК 517.957, 532.5

ХИРОТА ТЕҢДЕУІ ҮШІН ТАНГЕНС ӘДІСІ

Қалықбай Ырысбай Сағынтайұлы
yrys.bay@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі-Г.Н.Шайхова

Сызықты емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер ғылымның әртүрлі салаларында, мысалы биология, қатты дене физикасы, сұйықтар механикасы, плазма физикасы, конденсирленген орта физикасы, оптикалық талшықтар және химиялық физикада физикалық құбылыстарды сипаттауда кеңінен қолданылады [1]. Әртүрлі әдістер, атап айтсақ, Дарбу түрлендіру әдісі [2], Хирота әдісі [3], тангенс әдісі [4-5] және тағыда басқа әдістер сызықты емес дербес туынды дифференциалдық теңдеулерді шешу үшін дамыған.

Хирота теңдеуі

$$iq_t + \alpha\left(2|q|^2 q + q_{xx}\right) + i\gamma\left(q_{xxx} + 6|q|^2 q_x\right) = 0, \tag{1}$$

мұндағы $q(x,t)$ кеңістіктік координат x және t уақыттың комплекс мәнді функциясы болады, α және γ нақты тұрақтылар, i комплексті сан. (1)-ші теңдеу [6] ұсынылды және [7-8] зерттелді.

Тангенс әдісінің сапаттамасы

Бұл бөлімде тангенс әдісін сипаттаймыз [4-5]. Тангенс әдісі бойынша толқындық айнымалыны келесідей түрде аламыз

$$Q(x,t) = Q(x - ct), \tag{2}$$

дербес туынды дифференциалдық теңдеуді

$$E_1(Q_t, Q_x, Q_{xx}, Q_{xxx}, \ldots) = 0, \tag{3}$$

қарапайым дифференциалды теңдеуге айналдырамыз

$$E_2(Q, Q', Q'', Q''', \ldots) = 0. \tag{4}$$

Қарапайым дифференциалдық теңдеудің (4) шешімдері келесі түрде ізделінеді

$$Q(x,t) = \lambda \tan^{\beta}(\mu\xi);\ |\xi| \le \frac{\pi}{2\mu}, \tag{5}$$

мұндағы λ, μ және β анықталатын параметрлер, μ толқындық сан және c толқынның жылдамдығы [1]. (5) теңдеудің бірінші және екінші ретті туындылары келесідей болады [4-5]

$$\left(Q^n\right)' = n\lambda^n \beta\mu\left[\tan^{n\beta-1}(\mu\xi) + \tan^{n\beta+1}(\mu\xi)\right] \tag{6}$$

$$\left(Q^n\right)'' = n^2\lambda\beta\mu^2\left[(n\beta-1)\tan^{n\beta-2}(\mu\xi) + 2\beta\tan^{\beta}(\mu\xi) + (n\beta+1)\tan^{n\beta+2}(\mu\xi)\right] \tag{7}$$

Берілген (5)-(7) теңдеулерді қарапайым дифференциалды теңдеуге (4) қойып, алынған алгебралық теңдеулер жүйесін компьютерленген символдық пакеттердің көмегімен шешеміз. Содан кейін біз $\tan^k(\mu\xi)$- де бірдей дәрежедегі барлық мүшелерді жинаймыз және белгісіз α, μ және β арасында алгебралық теңдеулер жүйесін алу үшін олардың коэффициенттерін нөлге тең етіп орнатамыз және кейінгі жүйені шешеміз.

Тангенс әдісін қолдану

Хирота теңдеуін (1) қарастырып, түрлендіру жасаймыз

$$q = e^{i(ax+dt)}Q(x,t), \tag{8}$$

теңдеу (1) мына түрге келеді

$$\begin{aligned} &-dQ + iQ_t + 2\alpha Q^3 - \alpha a^2 Q + 2\alpha i a Q_x + \alpha Q_{xx} + \gamma a^3 Q - 3i\gamma a^2 Q_x - \\ &-3\gamma a Q_{xx} + i\gamma Q_{xxx} - 6\gamma a Q^3 + 6i\gamma Q^2 Q_x = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Нақты және жорамал бөліктерін (9)-ші теңдеуден бөліп аламыз

$$-dQ + 2\alpha Q^3 - \alpha a^2 Q + \alpha Q_{xx} + \gamma a^3 Q - 3\gamma a Q_{xx} - 6\gamma a Q^3 = 0. \tag{10}$$

$$Q_t + 2\alpha a Q_x - 3\gamma a^2 Q_x + \gamma Q_{xxx} + 6\gamma Q^2 Q_x = 0. \tag{11}$$

Толқындық түрлендіруді қою арқылы

$$Q(x,t) = Q(\xi) = Q(x - ct), \tag{12}$$

(10)-(11) жүйені келесідей жазамыз

$$\left(\gamma a^3 - \alpha a^2 - d\right)Q + (\alpha - 3\gamma a)Q'' + 2(\alpha - 3\gamma a)Q^3 = 0, \tag{13}$$

$$\left(-c + 2\alpha a - 3\gamma a^2\right)Q' + \gamma Q''' + 6\gamma Q^2 Q' = 0. \tag{14}$$

(14) теңдеуді интегралдап және интегралдау тұрақтысын нөлге тең деп алып, алатынымыз

$$\left(-c + 2\alpha a - 3\gamma a^2\right)Q + \gamma Q'' + 2\gamma Q^3 = 0.$$

Сонда (13)-(14) теңдеулер жүйесі мына түрде болады

$$\left(\gamma a^3 - \alpha a^2 - d\right)Q + (\alpha - 3\gamma a)Q'' + 2(\alpha - 3\gamma a)Q^3 = 0, \tag{15}$$

$$\left(-c + 2\alpha a - 3\gamma a^2\right)Q + \gamma Q'' + 2\gamma Q^3 = 0. \tag{16}$$

(15)-(16) теңдеулер мына шартты қанағаттандырады

$$c = 2\alpha a - 3\gamma a^2 - \frac{\left(\gamma^2 a^3 - \gamma\alpha a^2 - \gamma d\right)}{(\alpha - 3\gamma a)}.$$

Біз тангенс әдісімен (15)-ші теңдеуді шешеміз. Ол үшін мынадай түрлендіру жасаймыз

$$Q = \lambda \tan^{\beta}(\mu\xi). \tag{17}$$

Тангенс шешімін табу үшін (17)-ші теңдеудің екінші ретті туындысын аламыз

$$Q'' = \lambda\beta\mu^2\left[(\beta-1)\tan^{\beta-2}(\mu\xi) + 2\beta\tan^{\beta}(\mu\xi) + (\beta+1)\tan^{\beta+2}(\mu\xi)\right]. \tag{18}$$

(17) және (18) теңдеулерді (15)-ші теңдеуге қойып келесіні аламыз

$$\begin{aligned}&\left(\gamma a^3 - \alpha a^2 - d\right)\lambda \tan^{\beta}(\mu\xi) + (\alpha - 3\gamma a)\times \\ &\times \lambda\beta\mu^2\left[(\beta-1)\tan^{\beta-2}(\mu\xi) + 2\beta\tan^{\beta}(\mu\xi) + (\beta+1)\tan^{\beta+2}(\mu\xi)\right] + \\ &+ 2(\alpha - 3\gamma a)\lambda^3 \tan^{3\beta}(\mu\xi) = 0.\end{aligned} \tag{19}$$

(19)-ші теңдеуден β тауып аламыз:

$$\beta - 2 = 3\beta \Rightarrow \beta = -1. \tag{20}$$

(20) -ші теңдеуді (19) -ші теңдеуге қойып келесі өрнекті аламыз

$$\begin{aligned}&\left(\gamma a^3\lambda - \alpha a^2\lambda - d\lambda\right)\tan^{-1}(\mu\xi) + 2\alpha\lambda\mu^2\tan^{-3}(\mu\xi) - 6\gamma a\lambda\tan^{-3}(\mu\xi) + \\ &2\alpha\lambda\mu^2\tan^{-1}(\mu\xi) - 6\gamma a\lambda\mu^2\tan^{-1}(\mu\xi) + 2\left(\alpha\lambda^3 - 3\gamma a\lambda^3\right)\tan^{-3}(\mu\xi) = 0.\end{aligned} \tag{21}$$

(21)-ші теңдеуден келесі теңдеулер жүйесін аламыз

$$\tan^{-1}(\mu\xi);\gamma a^3\lambda - \alpha a^2\lambda - d\lambda + 2\alpha\lambda\mu^2 - 6\gamma a\lambda\mu^2 = 0, \tag{22}$$

$$\tan^{-3}(\mu\xi);2\alpha\lambda\mu^2 - 6\gamma a\lambda\mu^2 + 2\left(\alpha\lambda^3 - 3\gamma a\lambda^3\right) = 0. \tag{23}$$

(22)-(25) -ші теңдеулерден келесі мәндерді табамыз

$$\mu = \sqrt{\frac{\gamma a^3 + \alpha a^2 + d}{6\gamma a - 2\alpha}}, \qquad \lambda = i\mu. \tag{24}$$

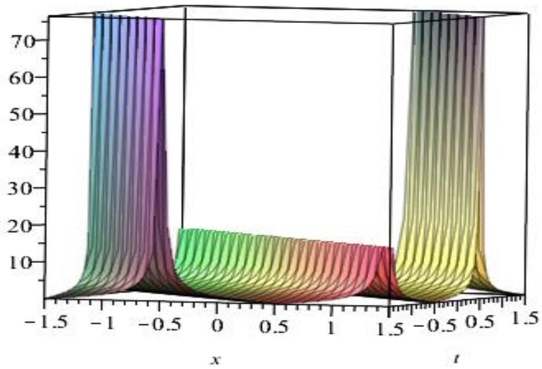
(24) теңдеулерді (17)-шы теңдеуге қойып және алынған мәндерді (8) теңдеуге қойып тангенс шешімін аламыз

$$q\ (x,t) = e^{i(ax+dt)} i\sqrt{\frac{\gamma a^3 + \alpha a^2 + d}{6\gamma a - 2\alpha}} \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{\gamma a^3 + \alpha a^2 + d}{6\gamma a - 2\alpha}}(x - ct)\right). \tag{25}$$

(25)-ші табылған шешім (15) және (16) теңдеулерді қанағаттантырады, егер

$$c = 2\alpha a - 3\gamma a^2 - \frac{\left(\gamma^2 a^3 - \gamma\alpha a^2 - \gamma d\right)}{(\alpha - 3\gamma a)}.$$

Жоғарыда табылған шешімнің графигі 1-ші суретте берілген.



Сурет. 1. $q(x,t)$ шешімнің 3D-графигі, мұндағы $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 0.5, a = 1, d = 1.$

Бұл жұмыста біз Хирота теңдеуін зерттедік. Тангенс әдісі арқылы осы теңдеудің нақты толқындық шешімін алдық. Алынған шешімді Maple бағдарламасында 3D-графигін тұрғыздық. Осы әдіс көптеген сызықты емес теңдеулерге қолданылуы мүмкін.

Зерттеу жұмысы Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі Ғылым комитетінің жобасы аясында дайындалған (ЖТН жобасы: AP08956932).

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Wazwaz A. Partial differential equations and solitary waves theory // Springer.-2009.-P.746
2. Bekova G., Yesmakhanova Y., Myrzakulov R., Shaikhova G. Darboux Transformation and Soliton Solution for the (2+1)-dimensional Complex Modifed Korteweg-de Vries Equations. // J.Phys.:Conference Series . — 2017. — T. 54, № 936. — C. 012045 (1–9)..
3. Mukhanmedina K.T., Syzdykova A.M.,Shaikhova G.N. Soliton solutions of two-component Hirota equation. Bulletin of the Karaganda university. //Mathematics series. 2015, No.4 (80), pp.103-107.
4. Jawal M., Al-Shaeer A. Solutions for Nonlinear Partial Differential Equations by Tan-Cot Method.// IOSR Journal of Mathematics, vol 5, Issue 3. 2013, pp 06-11.
5. Jawal A.J. New exact solutions of Nonlinear Partial Differential Equations Using Tan-Cot Function Method.// Studies in Mathematical sciences, Vol.5, No 2, 2012, pp 13 – 25
6. Hirota R., Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation. //Journal of Mathematical Physics. 1973. 14, 805.
7. Sasa N.and Satsuma J., New-Type of Soliton Solutions for a Higher-Order Nonlinear Schrödinger Equation. // J. Phys. Soc. Jpn. 1991.60, 409.
8. Tao Y. and He J. Multisolitons, breathers, and rogue waves for the Hirota equation generated by the Darboux transformation. //Phys. Rev. E. 2012. 85, 02660.
9. Wazwaz A. Partial differential equations and solitary waves theory. 2009. Springer. 746 p.