УДК 517.98

$B^{\alpha}_{\rho,1}(K)$ БӨЛШЕКТІ КЕҢІСТІКТЕ БІР СИНГУЛЯРЛЫ ИНТЕГРАЛДЫҚ ОПЕРАТОРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Жұмаділлә Жанерке Ерланқызы
zhumadilla_zh@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ Механика-математика факультетінің
7М05401-Математика мамандығының 2 курс магистранты, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Кошкарова Б.С.

$K-\tau=u+iv$ нүктелерінің E комплексті жазықтықтағы радиусы r-ге тең шеңбер болсын. Келесі сызықты емес операторды қарастырайық

$$S\rho(\tau)=-\frac{ie^{2i\varphi}\cdot Re\tau\cdot\overline{\Pi_0\rho(\tau)}}{r^2\left(|\mathrm{Im}\,T_0\rho(\tau)|+\sqrt{\left(\mathrm{Im}\,T_0\rho(\tau)\right)^2+|Re\tau\cdot\Pi_0\rho(\tau)|^2}\right)}\cdot\Pi_0\rho(\tau)\,, \qquad (1)$$

мұнда

$$\Pi_0\rho(\tau)=-\frac{r^2}{\pi}\iint_K\frac{\rho(s)}{(s-\tau)^2}d\xi d\eta-\frac{r^2\tau^2}{\pi}\iint_K\frac{\overline{\rho(s)}}{(r^2-\tau\bar{s})^2}d\xi d\eta+C_0r^2=$$

$$=r^2\Pi\rho(\tau)+r^2\tau^2\Pi_1\rho(\tau)+C_0r^2 \qquad (2)$$

$$T_0\rho(\tau)=-\frac{1}{\pi}\iint_K\left(\frac{r^2\rho(s)}{s-\tau}-\frac{r^2\rho(s)}{s}+\frac{r^3\overline{\rho(s)}}{r^2-\tau\bar{s}}\right)d\xi d\eta+\frac{2}{\pi}\int_0^{\tau}\left(\iint_K\frac{t^2\overline{\rho(s)}}{r^2-t\bar{s}}d\xi d\eta\right)dt+$$

$$+C_0\tau r^2+ib=r^2T\rho(\tau)-r^2T\rho(0)+r^3T_1\rho(\tau)-2\int_0^{\tau}t^2T_1\rho(t)dt+C_0\tau r^2+ib, \qquad (3)$$

мұндағы C_0 – кез келген тұрақты, $b-$ оң тұрақты.
(1) түріндегі оператор сығылмайтын идеал сұйықтықтың өсісимметриялық тороидалдық қозғалысының стационарлық жағдайын зерттеу кезінде туындайды [1].

Бұл жұмыста (1) операторының қасиеттері О.В.Бесовтың $B^{\alpha}_{\rho,1}(K)$, $1<\rho<2,\ 0<\alpha<\frac{2}{\rho}-1$, кеңістігінің $\|\rho\|_{B^{\alpha}_{\rho,1}(K)}\le Q$ шарында зерттелген.

Анықтама 1 [2]. $f(\tau)$ функциясы $B^{\alpha}_{\rho,1}(K), 1\le\rho<\infty, 0<\alpha<1$, бөлшек кеңістігіне тиісті деп айтамыз, егер келесі шарттар орындалса:

1) $f(\tau)\in L_p(K)$;
2) $\|f\|_{b^{\alpha}_{\rho,1}(G)}\equiv\iint_{|h|<\delta}|h|^{-(2+\alpha)}\|\Delta_h f\|_{L_p(G)}dh_1dh_2<\infty$,

мұндағы

$$\Delta_h f(\tau)=\begin{cases}f(\tau+h)-f(\tau), \text{егер } [\tau,\tau+h]\subset K,\\ 0, \ \text{егер } \ [\tau,\tau+h]\not\subset K,\end{cases}$$

$h-K$-дағы кез келген вектор.
$B^{\alpha}_{\rho,1}(K)$ кеңістігінің нормасы келесі түрде анықталады:

$$\|f\|_{B^{\alpha}_{\rho,1}(K)}=\|f\|_{L_p(K)}+\|f\|_{b^{\alpha}_{\rho,1}(K)}.$$

Алдымен $S\rho(\tau)$ операторына кіретін операторлардың қасиеттерін зерттейік. Келесі теоремалар орынды.

Теорема 1 [2]. Егер $\rho \in B_{\rho,\theta}^{\alpha}(K), 1 < \rho < \infty, 1 \leq \theta < \infty, 0 < \alpha < 1$, онда сингулярлы оператор $\Pi\rho(\tau)$ негізгі Коши мағынасында бар және $B_{\rho,\theta}^{\alpha}(K)$ кеңістікті өзіне бейнелейтін шектеулі операторы болады, сондай-ақ ол үшін мына

$$\|\Pi\rho(\tau)\|_{B_{\rho,\theta}^{\alpha}(K)} \leq N_1\|\rho\|_{B_{\rho,\theta}^{\alpha}(K)} \tag{4}$$

теңсіздік орындалады.

Осында және ары қарай да N_i-лар $\rho(\tau)$ функциясына тәуелсіз әр түрлі тұрақтылар белгіленген.

Теорема 2 [2]. Егер $\rho \in B_{\rho,\theta}^{\alpha}(G), 1 < \rho < \infty, 1 \leq \theta < \infty, 0 < \alpha < 1$, онда $g(\tau) = T\rho(\tau)$ функциясы $B_{\rho,\theta}^{1+\alpha}(G)$ тиесілі және

$$\|T\rho(\tau)\|_{B_{\rho,\theta}^{1+\alpha}(G)} \leq N_2\|\rho\|_{B_{\rho,\theta}^{\alpha}(G)}. \tag{5}$$

Теорема 3 [2]. Егер $\rho \in B_{\rho,\theta}^{\alpha}(G), 1 < \rho < \infty, 1 \leq \theta < \infty, 0 < \alpha < 1$, онда $g(\tau) = T_1\rho(\tau)$ функциясы $B_{\rho,\theta}^{1+\alpha}(G)$ тиесілі және

$$\|T_1\rho(\tau)\|_{B_{\rho,\theta}^{1+\alpha}(G)} \leq N_3\|\rho\|_{B_{\rho,\theta}^{\alpha}(G)}. \tag{6}$$

Теорема 4 [3]. Егер $\rho \in B_{\rho,\theta}^{\alpha}(G), 1 < \rho < \infty, 1 \leq \theta < \infty, 0 < \alpha < 1$, онда $\Pi_1\rho(\tau)$ сингулярлы оператор $B_{\rho,\theta}^{\alpha}(K)$ кеңістікті өзіне бейнелейтін шектеулі операторы болады, сондай-ақ ол үшін мына

$$\|\Pi_1\rho(\tau)\|_{B_{\rho,\theta}^{\alpha}(K)} \leq N_4\|\rho\|_{B_{\rho,\theta}^{\alpha}(K)} \tag{7}$$

теңсіздік орындалады.

Әрі қарай қысқарту үшін келесі белгілеу енгіземіз

$$A\rho = -ir^{-2}e^{2i\varphi}Re\tau \cdot \overline{\Pi_0\rho} \cdot (B\rho)^{-1}, \tag{8}$$

мұндағы

$$B\rho = |\operatorname{Im} T_0\rho(\tau)| + \sqrt{(\operatorname{Im} T_0\rho(\tau))^2 + |Re\tau \cdot \Pi_0\rho(\tau)|^2}. \tag{9}$$

А.Игликовтың [1] еңбегінде кез келген $m, 0 < m < b$, үшін $r \leq r_0$ болғанда

$$|y| = |ImT_0\rho| \geq m, \tag{10}$$

бағалау орындалатындай $r_0 = r_0(b, m, Q, C_0)$ бар болатынын көрсетті. Сонымен қатар, [2] жұмысынан

$$|\Pi_0\rho| \leq r^2\big(C_1\|\rho\|_{L_P(K)} + r^2C_2\|\rho\|_{L_P(K)} + |C_0|\big), \tag{11}$$

белгілі, онда (10) бағалауды да ескере отырып, келесі теңсіздікке келеміз

$$|A\rho| \leq \frac{r\left((C_1+r^2C_2)Q+|C_0|\right)}{m+\sqrt{m^2+r^5\left((C_1+r^2C_2)Q+|C_0|\right)^2}} = rC_3. \tag{12}$$

Енді $\Delta_h B\rho$ және $\Delta_h A\rho$ бағалаймыз:

$$|\Delta_h B\rho| \leq |Im\Delta_h T_0\rho| +$$

$$+\frac{|ImT_0\rho(\tau+h)|^2-|ImT_0\rho(\tau)|^2+|Re(\tau+h)\cdot\Pi_0\rho(\tau+h)|^2-|Re\tau\Pi_0\rho(\tau)|^2}{\sqrt{|ImT_0\rho(\tau+h)|^2+|Re(\tau+h)\cdot\Pi_0\rho(\tau+h)|^2}+\sqrt{|ImT_0\rho(\tau)|^2+|Re\,\tau\Pi_0\rho(\tau)|^2}}. \tag{13}$$

$$\big||ImT_0\rho(\tau+h)|-|ImT_0\rho(\tau)|\big| \leq |ImT_0\rho(\tau+h)-ImT_0\rho(\tau)| \leq |Im\Delta_h T_0\rho|,$$

$$|Re(\tau+h)-Re\,\tau| \leq |\tau+h-\tau| = h,$$

болғандықтан, келесі теңсіздіктер айқын

$$\frac{|ImT_0\rho(\tau+h)|+|ImT_0\rho(\tau)|}{\sqrt{|ImT_0\rho(\tau+h)|^2+|Re(\tau+h)\cdot\Pi_0\rho(\tau+h)|^2}+\sqrt{|ImT_0\rho(\tau)|^2+|Re\tau\Pi_0\rho(\tau)|^2}} \leq 1,$$

$$\frac{|Re(\tau+h)\cdot\Pi_0\rho(\tau+h)|+|Re\,\tau\Pi_0\rho(\tau)|}{\sqrt{|ImT_0\rho(\tau+h)|^2+|Re(\tau+h)\cdot\Pi_0\rho(\tau+h)|^2}+\sqrt{|ImT_0\rho(\tau)|^2+|Re\tau\Pi_0\rho(\tau)|^2}} \leq$$

$$\leq \frac{r^3\left((C_1+r^2C_2)Q_P+|C_0|\right)}{\sqrt{m^2+r^5\left((C_1+r^2C_2)Q_P+|C_0|\right)^2}} = C_4.$$

Онда (4)-(7) бағалауларды ескере отырып, алатынымыз

$$|\Delta_h B\rho| \leq r^2[C_5\|\rho\|_P + 2C_0h], \tag{14}$$

мұндағы $C_5 = 4N_2 + 3rN_3 + C_4(C_1 + r^2C_2)$.

Әрі қарай,

$$\Delta_h A\rho = -\frac{1}{r^2}\left[\frac{\overline{\Pi_0\rho(\tau+h)}}{B\rho(\tau)}\left(e^{2i\varphi_2}Re(\tau+h)-e^{2i\varphi_1}Re(\tau)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{e^{2i\varphi_2}Re(\tau)}{B\rho(\tau)}\Delta_h\overline{\Pi_0\rho}+\frac{e^{2i\varphi_2}Re(\tau)\overline{\Pi_0\rho(\tau)}}{B\rho(\tau+h)B\rho(\tau)}\Delta_h B\rho\right]$$

болғандықтан,

$$\left|e^{2i\varphi_2}Re(\tau+h)-e^{2i\varphi_1}Re(\tau)\right| \leq 10h$$

ескере отырып (қара [1], (4.43)), және (4), (7), (10), (11), (14) бағалауларды қолдана отырып келесі теңсіздікке келеміз

$$|\Delta_h A\rho| \leq \mathrm{C}_6 h, \tag{15}$$

мұндағы $C_6 = C_3 + \frac{N_1+N_4+C_3\cdot(C_5\|\rho\|_P+2C_0h)}{m+\sqrt{m^2+r^5((C_1+r^2C_2)\|\rho\|_P+|C_0|)^2}}$.

Осыдан,

$$S\rho(\tau) = A\rho(\tau)\Pi_0\rho(\tau)$$

операторының $L_P(K)$ кеңістігінде нормасын бағалайық:

$$\|S\rho\|_{L_P(K)} \leq \max_{\tau\in K}|A\rho|\ \|\Pi_0\rho\|_{L_P(K)} \leq rC_3(N_1+N_4)\|\rho\|_{B^{\alpha}_{\rho,1}(K)}, \qquad (16)$$

яғни, $S\rho \in L_P(K)$.

Әрі қарай, Минковский, Гельдер теңсіздіктерін, (4), (7), (15) бағалауларын және $B^{\alpha}_{\rho,1}(K) \subset L_2(K)$ енгізуді ескеріп, келесі теңсіздікке келеміз

$$\|\Delta_h S\rho\|_{L_p(K)} = \|\Delta_h(A\rho\Pi_0\rho)\|_{L_p(K)} \leq \|A\rho(\tau+h)\cdot\Delta_h\Pi_0\rho\|_{L_p(K)} + \|\Pi_0\rho\Delta_h A\rho\|_{L_p(K)} \leq$$

$$\leq \max_{\tau\in K}|A\rho|\ \|\Delta_h\Pi_0\rho\|_{L_p(K)} + \|\Pi_0\rho\|_{L_p(K)}\cdot\|\Delta_h A\rho\|_{L_q(K)} \leq$$

$$\leq rC_3(N_1+N_4)\|\rho\|_{B^{\alpha}_{\rho,1}(K)} + \|\rho\|_{B^{\alpha}_{\rho,1}(K)}\|\Delta_h A\rho\|_q,$$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Осыдан алатынымыз

$$\|S\rho\|_{b^{\alpha}_{\rho,1}(K)} \leq (N_1+N_4)(rC_3+C_6h)\|\rho\|_{B^{\alpha}_{\rho,1}(K)}, \qquad (17)$$

демек

$$\|S\rho\|_{B^{\alpha}_{\rho,1}(K)} \leq C_7\|\rho\|_{B^{\alpha}_{\rho,1}(K)},$$

мұндағы $C_7 = (N_1+N_4)(2rC_3+hC_6)$.

Осылайша келесі теорема дәлелденді.

Теорема 5. $\rho(\tau) \in B^{\alpha}_{\rho,1}(K), 1<\rho<2, 0<\alpha<\frac{2}{\rho}-1$ болсын, онда (1) түріндегі $S\rho(\tau)$ сызықтық емес операторы $B^{\alpha}_{\rho,1}(K)$ кеңістігін өз-өзіне бейнелейді және

$$\|S\rho\|_{B^{\alpha}_{\rho,1}(K)} \leq C_7\|\rho\|_{B^{\alpha}_{\rho,1}(K)},$$

мұндағы C_7 - ρ-ға тәуелсіз, қандай да бір тұрақты.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Игликов А. Краевые задачи со свободной границей для систем уравнений движения несжимаемой идеальной жидкости. Вихревые кольца. – Алматы: Ғылым, 1995, 43 с.

2. Блиев Н.К. Обобщенные в смысле И.Н.Векуа аналитические функции и краевые задачи в дробных пространствах //Матем.сб., 1978, Т. 14, №1, С. 1-11.

3. Кошкарова Б.С. Краевая задача со свободной границей для вырождающейся эллиптической системы уравнений гидродинамики // Дисс. на соискание уч.степени к.ф.-м.н., Алматы, 2005, 96 с.