УДК 517.51

КОМПАКТНОСТЬ ОПЕРАТОРА ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ НИЖНИМ ПРЕДЕЛОМ

Сейлбеков Болат Нагашбекович
Докторант, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
E-mail: bolat_3084@mail.ru
Научный руководитель-А.М. Абылаева

Введение. Пусть $0 < p, q < \infty$, $p > 1$, u-неубывающая весовая функция и v, w-весовые функции т.е. неотрицательные, измеримые и локально суммируемые на

$I=(0,+\infty)$ функции такие, что $v\in L_1^{loc}(I)$, $w\in L_1(0,t)$, $\forall t>0$. Положим $W(x)=\int_0^x w(s)ds,$ $x>0$. Функция φ строго возрастающая локально абсолютно непрерывная функция со свойством: $\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$ и $\varphi(x)\ge x$, $\forall x\in I$.

Рассмотрим вопрос об ограниченности из $L_{p,w}\equiv L_{p,w}(I)$ в $L_{q,v}\equiv L_{q,v}(I)$ интегрального оператора

$$K_\varphi f(x)=\int_{\varphi(x)}^{\infty}\frac{u(s)W^{\beta}(s)f(s)w(s)ds}{\left(W(s)-W(x)\right)^{1-\alpha}},\ \forall x\in I, \tag{1}$$

где $L_{p,w}$- пространство всех измеримых на I функции таких, что

$$\|f\|_{p,w}=\left(\int_0^\infty |f(s)|^p w(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}<\infty,\ 0<p<\infty .$$

Когда нижний предел $\varphi(x)=x$ ограниченность и компактность интегрального оператора (1) исследовано в работе [1]. А в частном случае когда оператор

$$T_\varphi f(x)=\int_0^{\varphi(x)}\frac{u(s)W^{\beta}(s)f(s)w(s)ds}{\left(W(x)-W(s)\right)^{1-\alpha}}\ ,\ \varphi(x)\le x,\ x\in I$$

получены критерий ограниченности из $L_{p,w}$ в $L_{q,v}$ оператора вытекает из результатов работы [2].

Для любого линейного оператора $K_\varphi : L_{p,w}\to L_{q,v}$ для удобства положим $\|K_\varphi\|=\|K_\varphi\|_{L_{p,w}\to L_{q,v}}$.

Лемма. Пусть $0<\beta<1$ и функция $\gamma(\cdot)$ определена на I, причем $0<\gamma(x)\le 1$, $\forall x\in I$.

$$\int_0^{\gamma(x)}\frac{dz}{(1-z)^{1-\beta}}\le\frac{\gamma(x)}{\beta},\ \forall x\in I .$$

Действительно, используя неравенство $(1-\gamma(x))^\beta\ge 1-\gamma(x)$, имеем

$$\int_0^{\gamma(x)}\frac{dz}{(1-z)^{1-\beta}}=\frac{1}{\beta}\left[1-(1-\gamma(x))^\beta\right]\le\frac{1}{\beta}\left[1-(1-\gamma(x))\right]=\frac{\gamma(x)}{\beta}.$$

Теорема. Пусть $0<\alpha<1$, $\frac{1}{\alpha}<p\le q<\infty$, $\beta\le 0$. Пусть u -неубывающая функция на I . Тогда оператор K_φ компактен из $L_{p,w}$ в $L_{q,v}$ тогда только тогда, если

$$\text{a)}\quad A_\varphi=\sup_{s>.0}A_\varphi(s)<\infty\ \text{ и b) }\lim_{s\to 0+}A_\varphi(s)=\lim_{s\to\infty-}A_\varphi(s)=0,$$

где $A_\varphi=\sup_{s\in I}\left(\int_{\varphi(s)}^\infty u^{p'}(t)W^{p'(\beta+\alpha-1)}(t)w(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_0^s v(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$.

Доказательство. Необходимость. Условие а) тривиально следует из Теоремы1 [3].

Теперь докажем условие b) Для $0<t<\infty$ рассмотрим семейство функций $\{f_t\}_{t>0}$, где

$$f_t(x)=\chi_{(\varphi(t),\infty)}(x)u^{p'-1}(x)W^{(p'-1)(\beta+\alpha-1)}(x)\left(\int_{\varphi(t)}^{\infty}u^{p'}(s)W^{p'(\beta+\alpha-1)}(s)w(s)ds\right)^{-\frac{1}{p}},\ x\in I \quad (2)$$

Заметим, что

$$\|f_t\|_{p,w}=\left(\int_0^{\infty}|f_t(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_0^{\varphi(t)}|f_t(x)|^p w(x)dx+\int_{\varphi(t)}^{\infty}|f_t(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}=1 \quad (3)$$

Покажем, что семейство функции (2) слабо сходится к нулю в $L_{p,w}$. В силу теоремы([4], VI, §2)) об общем виде линейных непрерывных функционалов на $L_{p,w}$ имеют вид:

$$\int_0^{\infty}f(x)g(x)dx,\ \text{где}\ g\in L_{p',w^{1-p'}}$$

Поэтому, используя неравенство Гельдера с показателями p и $p'=\dfrac{p}{p-1}$ и с учетом (3), имеем

$$\int_0^{\infty}f_t(x)g(x)dx=\int_{\varphi(t)}^{\infty}f_t(x)g(x)dx\le\left(\int_{\varphi(t)}^{\infty}|f_t(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\varphi(t)}^{\infty}|g(x)|^{p'}w^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$=\left(\int_{\varphi(t)}^{\infty}|g(x)|^{p'}w^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} \quad (4)$$

Так как $g\in L_{p',w^{1-p'}}$ то последний интеграл в (4) стремится к нулю, при $t\to\infty$, что означает слабую сходимость $f_t\to 0$, при $t\to\infty$.

Так как компактный оператор в банаховом пространстве всякую слабо сходящуюся последовательность переводит в сильно сходящуюся, то

$$\lim_{t\to\infty-}\|K_\varphi f_t\|=0. \quad (5)$$

Имеем:

$$\|K_\varphi f_t\|_{q,v}^q=\int_0^{\infty}v(x)\left(\int_{\varphi(x)}^{\infty}\frac{u(s)W^{\beta}(s)f_t(s)w(s)ds}{(W(s)-W(x))^{1-\alpha}}\right)^q dx\ge\int_0^{t}v(x)\left(\int_{\varphi(x)}^{\infty}\frac{u(s)W^{\beta}(s)f_t(s)w(s)ds}{(W(s)-W(x))^{1-\alpha}}\right)^q dx\ge A_\varphi^q(t). \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует что $\lim\limits_{t\to\infty-}A_\varphi(t)=0$.

Осталось показать, это $\lim\limits_{t\to 0}A_\varphi(t)=0$.

Из компактности оператора $K_\varphi:L_{p,w}\to L_{q,v}$ следует компактность сопряженного оператора

$$K_\varphi^* g(s)=u(s)W^{\beta}(s)w(s)\int_0^{\varphi^{-1}(s)}\frac{g(x)dx}{(W(s)-W(x))^{1-\alpha}}$$

из $L_{q',v^{1-q'}}$ в $L_{p',w^{1-p'}}$.

Для $0<t<\infty$ введем семейство функции:

$$\mathrm{g}_t(x)=\chi_{(0,t]}(x)\left(\int_0^t v(x)dx\right)^{-\frac{1}{q'}} v(x),\ x\in I \tag{7}$$

Эти функции корректно определены, поскольку интегралы входящие в них конечны в силу условия $A_\varphi<\infty$. Покажем, что для любого $t>0$ функции $g_t\in L_{q',v^{1-q'}}$, более того, что g_t слабо сходится к нулю, при $t\to 0$.

Действительно,

$$\|g_t\|_{q',v^{1-q'}}=\left(\int_0^\infty |g_t(x)|^{q'}v^{1-q'}(x)dx\right)^{\frac{1}{q'}}=\left(\int_0^t |g_t(x)|^{q'}v^{1-q'}(x)dx+\int_t^\infty |g_t(x)|^{q'}v^{1-q'}(x)dx\right)^{\frac{1}{q'}}=1$$

В силу (7) для $f\in L_{q,v}$, получим:

$$\int_0^\infty g_t(x)f(x)dx=\int_0^t g_t(x)f(x)dx\le\left(\int_0^t |f(x)|^q v(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^t |g_t(x)|^{q'}v^{1-q'}(x)dx\right)^{\frac{1}{q'}}\le\left(\int_0^t |f(x)|^q v(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Так как $f\in L_{q,v}$, то последний интеграл стремится к нулю, при $t\to 0$, что показывает слабую сходимость $g_t\to 0$ в $L_{q',v^{1-q'}}$, при $t\to 0$.

В силу компактности $K_\varphi^*:L_{q',v^{1-q'}}\to L_{p',w^{1-p'}}$, следует

$$\lim_{t\to 0}\|K_\varphi^* g_t\|_{p',w^{1-p'}}=0. \tag{8}$$

К тому же

$$\|K_\varphi^* g_t\|_{p',w^{1-p'}}=\left(\left(\int_0^{\varphi(t)}+\int_{\varphi(t)}^\infty\right)w^{1-p'}(s)\left|u(s)W^\beta(s)w(s)\int_0^{\varphi^{-1}(s)}\frac{g_t(x)dx}{(W(s)-W(x))^{1-\alpha}}\right|^{p'}ds\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$=\left(\int_{\varphi(t)}^\infty u^{p'}(s)W^{p'(\beta+\alpha-1)}(s)w(s)ds\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_0^t v(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\int_{\varphi(t)}^\infty u^{p'}(s)W^{p'(\beta+\alpha-1)}(s)w(s)ds\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_0^t v(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}=A_\varphi(t).$$

Откуда, из (8), вытекает: $\lim_{t\to 0}A_\varphi(t)=0$. Таким образом, необходимость доказана.

Достаточность. Для $0<c<d<\infty$ положим

$$P_c f=\chi_{(0;c]}f,\ P_{cd}f=\chi_{(c;d]}f,\ Q_d f=\chi_{[d;\infty)}f.$$

Тогда

$$T_\varphi f=1\cdot T_\varphi f=(P_c+P_{cd}+Q_d)T_\varphi f=P_cT_\varphi f+P_{cd}T_\varphi f+Q_dT_\varphi f=P_cT_\varphi P_c f+P_cT_\varphi P_{cd} f$$
$$+P_cT_\varphi Q_d f+P_{cd}T_\varphi P_c f+P_{cd}T_\varphi P_{cd} f+P_{cd}T_\varphi Q_d f+Q_dT_\varphi P_c f+Q_dT_\varphi P_{cd} f+Q_dT_\varphi Q_d f$$

Так как $P_{cd}T_\varphi P_c\equiv 0$, $Q_dT_\varphi P_c\equiv 0$, $Q_dT_\varphi P_{cd}\equiv 0$ то

$$T_\varphi f=P_cT_\varphi P_c f+P_cT_\varphi P_{cd} f+P_cT_\varphi Q_d f+P_{cd}T_\varphi P_{cd} f+P_{cd}T_\varphi Q_d f+Q_dT_\varphi Q_d f. \tag{9}$$

Покажем, что оператор $P_{cd}T_\varphi P_{cd}$ компактен из $L_{p,w}(I)$ в $L_{q,v}(I)$.

Так как $P_{cd}T_\varphi P_{cd}\, f(x)=P_{cd}T_\varphi \chi_{(c;d]}(x) f(x)\neq 0$, при $x\in(c;d]$, то достаточно показать, что оператор $P_{cd}T_\varphi P_{cd}$ компактен $L_{p,w}(c,d)$ в $L_{q,v}(c,d)$, а это в свою очередь эквивалентно компактности оператора

$$Kf(x)=\int_c^d K(x,s)f(s)ds$$

из $L_p(c,d)$ в $L_q(c,d)$, с ядром $K(x,s)=\dfrac{u(s)W^\beta(s)v^{\frac{1}{q}}(x)\chi_{(c,d]}(s)\theta(s-\varphi(x))w^{\frac{1}{p'}}(s)}{\left(W(s)-W(x)\right)^{1-\alpha}}$

где $\theta(z)$ -функция Хевисайда, (это означает что $\theta(z)=1$ для $z\geq 0$ и $\theta(z)=0$ для $z<0$).

Пусть $\{x_k\}_{k\in Z}$ последовательность точек, определенных в доказательстве теоремы1. Есть точки $x_{i-1}, x_n, x_{i-1}<x_n$ такие, что $x_{i-1}\leq c<x_i$, $x_{n-1}<d\leq x_n$. Мы предполагаем, что числа c, d выбраны так, что $x_i<x_{n-1}$. Поэтому в приведенном ниже интеграле и применив Лемму, получаем

$$\int_c^d\left(\int_c^d|K(x,s)|^{p'}ds\right)^{\frac{q}{p'}}dx=\int_c^d v(x)\left(\int_{\varphi(x)}^d\frac{\chi_{(c;d]}(s)u^{p'}(s)W^{p'\beta}(s)w(s)ds}{\left(W(s)-W(x)\right)^{(1-\alpha)p'}}\right)^{\frac{q}{p'}}dx$$

$$<<\sum_{k=i}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}v(x)\left(\int_{\varphi(x)}^{\varphi(x_{k+1})}\frac{u^{p'}(s)W^{p'\beta}(s)w(s)ds}{\left(W(s)-W(x)\right)^{(1-\alpha)p'}}\right)^{\frac{q}{p'}}dx+\sum_{k=i}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}v(x)\left(\int_{\varphi(x_{k+1})}^{d}\frac{u^{p'}(s)W^{p'\beta}(s)w(s)ds}{\left(W(s)-W(x)\right)^{(1-\alpha)p'}}\right)^{\frac{q}{p'}}dx$$

$$<<\mu(n-i+1)A_\varphi^q<\infty,\ \text{где}\ \sum_{k=i}^n 1=\mu(n-i+1).$$

Следовательно, по признаку Кантаровича ([4], XI, §3), Оператор K компактен из $L_{p,w}(c,d)$ в $L_{q,v}(c,d)$, что равносильно компактности из $L_{p,w}$ в $L_{q,v}$ оператора $P_{cd}T_\varphi P_{cd}$.

Из (9) имеем

$$\left\|T_\varphi-P_{cd}T_\varphi P_{cd}\right\|\leq\left\|P_cT_\varphi P_c\right\|+\left\|P_cT_\varphi P_{cd}\right\|+\left\|P_cT_\varphi Q_d\right\|+\left\|P_{cd}T_\varphi Q_d\right\|+\left\|Q_dT_\varphi Q_d\right\| \tag{11}$$

Покажем, что правая часть (11) стремится к нулю при $c\to 0$ и $d\to\infty$, тогда оператор K_φ как равномерный предел компактных операторов, будет компактен из $L_{p,w}$ в $L_{q,v}$.

На основании Теоремы1, имеем:

$$\left\|P_cT_\varphi P_c f\right\|_{q,v}=\left(\int_0^c v(x)\left|\int_{\varphi(x)}^\infty\frac{\chi_{(0;c]}(s)u(s)W^\beta(s)f(s)w(s)ds}{\left(W(s)-W(x)\right)^{1-\alpha}}\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\leq\sup_{0<z<c}A_\varphi(z)\cdot\|f\|_{p,w}.$$

Следовательно, $\left\|P_cT_\varphi P_c\right\|<<\sup\limits_{0<z<c}A_\varphi(z)$. Откуда,

$$\lim_{c\to 0+}\left\|P_cT_\varphi P_c\right\|<<\lim_{c\to 0+}\sup_{0<z<c}A_\varphi(z)=\lim_{z\to 0+}A_\varphi(z)=0. \tag{12}$$

Далее, также используя (12) оцениваем оператора $Q_d T_\varphi Q_d$ и выполняется следующую условия

$$\lim_{d\to\infty-}\left\|Q_d T_\varphi Q_d\right\| << \lim_{z\to\infty-} A_\varphi(z) = 0. \qquad (13)$$

Теперь мы докажем, что $\lim_{c\to 0+}\left\|P_{cd} T_\varphi Q_d\right\| = 0$.

Чтобы оценить $\left\|P_{cd} T_\varphi Q_d\right\|$ мы предполагаем, что $v_\varepsilon(x) = \varepsilon^q v(x)$ для $s \in I \setminus (d;\infty)$, $v_\varepsilon(x) = \varepsilon^q v(x)$ для $x \in (d;\infty)$ и $u_\varepsilon(s) = \varepsilon \cdot u(s)$ для $s \in I \setminus (d;\infty)$, где $1 > \varepsilon > 0$. Очивидно, функция u_ε-невозрастающая на I. Здесь $\theta(z)$-функция Хевисайда, (это означает что $\theta(z) = 1$ для $z \ge 0$ и $\theta(z) = 0$ для $z < 0$). Тогда согласно теореме1 получаем, что

$$\left\|P_{cd} T_\varphi Q_d f\right\|_{q,v}^q = \int_c^d v(x)\left|\int_{\varphi(x)}^{\infty} \frac{\chi_{(d;\infty)}(s)\theta(s-\varphi(x))u(s)W^\beta(s) f(s) w(s)ds}{\left(W(s)-W(x)\right)^{1-\alpha}}\right|^q dx << A_\varphi^\varepsilon \left\|f\right\|_{p,w} \qquad (14)$$

где $A_\varphi^\varepsilon = \sup_{z\in I}\left(\int_{\varphi(z)}^{\infty} u_\varepsilon^{p'}(s) W^{p'(\beta+\alpha-1)}(s) w(s)ds\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_0^z v_\varepsilon(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$.

Теперь оценим выражение A_φ^ε сверху следующим образом

$$A_\varphi^\varepsilon \le \sup_{0<z<d}\left(\varepsilon^{p'}\int_{\varphi(z)}^{\infty} u^{p'}(s) W^{p'(\beta+\alpha-1)}(s) w(s)ds\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_0^z v(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\sup_{d<z<\infty}\left(\int_{\varphi(z)}^{\infty} u^{p'}(s) W^{p'(\beta+\alpha-1)}(s) w(s)ds\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_0^d v(x)dx + \varepsilon^q\int_d^z v(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \le A_\varphi(d) + 2\varepsilon\cdot A_\varphi \qquad (15)$$

Так как левая часть (14) не зависит от $\varepsilon > 0$, то подставляя (15) в (14) и обозначая $\varepsilon \to 0$, получаем что $\left\|P_{cd} T_\varphi Q_d f\right\|_{q,v} << A_\varphi(d)\left\|f\right\|_{p,w}$.

Следовательно $\left\|P_{cd} T_\varphi Q_d\right\| << A_\varphi(d)$ и мы заключаем, что

$$\lim_{d\to\infty-}\left\|P_{cd} T_\varphi Q_d\right\| << \lim_{d\to\infty-} A_\varphi(d) = 0. \qquad (16)$$

Теперь мы используя (14), (15) и (16), оцениваем операторы $P_c T_\varphi P_{cd}$, $P_c T_\varphi Q_d$ и получаем следующие оценки

$$\lim_{c\to 0}\left\|P_c T_\varphi P_{cd}\right\| << \lim_{c\to 0} A_\varphi(c) = 0, \quad \lim_{c\to 0}\left\|P_c T_\varphi Q_d\right\| << \lim_{c\to 0} A_\varphi(c) = 0 \qquad (17)$$

Из (12), (13), (16) и (17) следует, что правая часть (11) стремится к нулю при $c \to 0$, $d \to \infty$, т.е. $\lim_{c\to 0+, d\to\infty-}\left\|T_\varphi - P_{cd} T_\varphi P_{cd}\right\| = 0$. Теорема полностью доказана.

Список литературы

1) Abylayeva A. Boundednes compactness for a class of Weyl type \\ Eurasian Mathematical Journal 7(2016), №1, 9-27.

2) А.М. Абылаева, Б.Н.Сейлбеков. Ограниченность одного оператора дробного интегрирования с переменным верхним пределом// Весник КазНПУ, им. Абая. (2019), №3(67), с.7-11.

3) Б.Н. Сейлбеков. Весовые оценки для операторов дробного интегрирования с переменным нимжим пределом// II Международное книжное издание стран Содружества Независимых Государств «ЛУЧШИЙ МОЛОДОЙ УЧЕНЫЙ-2020» III том, г.Нур-Султан, Казахстан, с.89-93.

4) Канторович Л.В., Акилов Г.Р. Функциональный анализ. М.: Наука 1977.