УДК 514.12

ПРИНЦИП СЖАТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ. ПРИМЕНЕНИЕ ЕГО В РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА И ФРЕДГОЛЬМА.

Ташмұқашева Камила Қанатқызы
kamila.tashmukasheva@gmail.com
Студент 4 курса специальности «Математика» механико-математического факультета ЕНУ им Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Рахимжанова С.К.

Целью исследования является изучение принципа сжимающих отображений в метрических пространствах, доказательство теоремы Банаха о принципе сжимающих отображений и демонстрация его применения для решения уравнений типа Фредгольма и Вольтерра.

Пусть задано отображение $A: X \to X$, где X – произвольное метрическое пространство.

Определение 1. Отображение A называется *сжатием,* если

$\exists 0 < q < 1: \forall x, y \in X\ \rho_X(Ax, Ay) \leq q\rho_X(x, y)$ (1)

Определение 2. Точка $x \in X$ называется *неподвижной* точкой отображения A, если x есть решение уравнения $Ax = x$.

Важным свойством сжимающих отображений является их непрерывность.

Теорема 1. [1[Пусть Х – произвольное метрическое пространство, на котором задано сжимающее отображение А: $X \to X$. Тогда А – непрерывно.

Теорема 2. [1], [2] Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве, имеет только одну неподвижную точку.

Доказательство:

Пусть x_0 — произвольная точки в полном метрическом пространстве X.

Положим

$$Ax_0 = x_1$$
$$Ax_1 = x_2$$
$$\dots$$
$$Ax_{n-1} = x_n$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ – фундаментальная. Для определенности будем считать $m < n$.

$$\rho_X(x_m, x_n) = \rho_X(Ax_m, Ax_n) \le q\rho_X(x_{m-1}, x_{n-1}) = q\rho_X(Ax_{m-2}, Ax_{n-2}) = \cdots \le q^m \rho_X(Ax_0, Ax_{n-m})$$

Воспользуемся неравенством треугольника:

$$\rho_X(x_m, x_n) \le q^m(\rho_X(x_0, x_1) + \rho_X(x_1, x_2) + \dots + \rho_X(x_{n-m-1}, x_{n-m})) \le q^m (\rho_X(x_0, x_1) + q\rho_X(x_0, x_1) + q^2\rho_X(x_0, x_1) + \dots + q^{n-m-1}\rho_X(x_0, x_1)) = q^m \rho_X(x_0, x_1)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-m-1}) < q^m \rho_X(x_0, x_1)\frac{1}{1-q}$$

Так как $q < 1$, то при достаточно большом n эта величина сколь угодно мала. В силу полноты A последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, будучи фундаментальной, имеет предел.

Положим $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Покажем, что x – неподвижная точка.

$$Ax = A\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$$

Итак, существование неподвижной точки доказано. Докажем ее единственность.

Если $Ax = x, Ay = y,$ то (1) имеет вид:

$$0 < \rho_X(x, y) < \rho_X(Ax, Ay) \le q\rho_X(x, y)$$

Так как $q < 1$, то отсюда следует, что

$\rho_X(x, y) = 0,$ то есть $x = y$

Теорема доказана.

Отметим, что доказательство теоремы представляет собой по сути вычислительный алгоритм, поэтому выявление в какой-либо задаче сжимающего отображения является важнейшим шагом к нахождению решения.

Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода.

Используем принцип сжимающих отображений для доказательства существования и единственности решения неоднородного линейного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода **[3]**

$$f(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)\varphi(s)ds \qquad (1)$$

Предполагаем, что ядро $K(t, s)$ непрерывно на $[a, b] \times [a, b]$. Функция $f(t)$ непрерывна на $[a, b]$.

Решение $\varphi_0(t)$ уравнения (1) ищем в классе $C[a.b]$ функций.

Покажем, что при достаточно малом по абсолютной величине λ - параметре, называемом характеристическим числом - уравнение имеет единственное решение.

Оператор

$$A\varphi \equiv \lambda \int_a^b K(t, s)\varphi(s)ds \qquad (2)$$

переводит любую функцию $\varphi(t) \in C[a, b]$ в функцию $\widetilde{\varphi(t)}$, определенную на том же промежутке $[a, b]$. Таким образом, нахождение решения $\varphi_0(t)$ уравнения (1) сводится к существованию неподвижной точки оператора $A\varphi$ -функции $\varphi_0(t)$, удовлетворяющей равенству $\varphi_0 = A\varphi_0$.

Докажем, что оператор A, определенный формулой (2), действует из полного пространства $C[a,b]$ в пространство $C[a,b]$, т. е. если $g(t) = A\varphi(t)$, где $\varphi(t) \in C[a,b]$, то и $g(t) \in C[a,b]$.

Пусть t – произвольная точка сегмента [a, b], $\Delta t -$ также произвольное, т. ч. $t + \Delta t \in [a,b]$.

Рассмотрим

$|g(t+\Delta t) - g(t)| = \left|\lambda \int_a^b K(t+\Delta t, s)\varphi(s)ds + f(t+\Delta t) - \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds - f(t)\right| \leq |\lambda| \int_a^b |K(t+\Delta t, s) - K(t,s)||\varphi(s)|ds + |f(t+\Delta t) - f(t)|$.

(3)

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию $f(t) \in C[a,b]$, и поэтому $\exists \delta_1 > 0$ такое, что

$$|f(t+\Delta t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall \Delta t: |\Delta t| < \delta_1 \ \#(4)$$

Обозначим $\Phi = \max_{a \leq t \leq b} |\varphi(t)|$.

Так как ядро $K(t,s)$ непрерывно на замкнутом множестве $[a,b] \times [a,b]$, то по теореме Кантора, оно равномерно непрерывно, т.е. $\Delta t < \delta_2$ и $\forall s \in [a,b]$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2 > 0: |K(t+\Delta t, s) - K(t,s)| < \frac{\varepsilon}{2\Phi(b-a)|\lambda|} \ \#(5)$$

Возьмем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда при $\forall \Delta t$ таких, что $|\Delta t| < \delta$, будут одновременно выполнятся неравенства (4) и (5) и в силу (3) получим, что

$$|g(t+\Delta t) - g(t)| < \varepsilon \ \ \forall \Delta t: |\Delta t| < \delta,$$

что и доказывает непрерывность функции $g(t)$ в любой точке $t \in [a,b]$.

Таким образом, $A: C[a,b] \to C[a,b]$.

Покажем, что оператор $A -$ сжимающий.

$\rho(A\varphi_1, A\varphi_2) = \max_{a \leq t \leq b} |A\varphi_1 - A\varphi_2| = \max\limits_{a \leq t \leq b} |\lambda \int_a^b K(t,s)\varphi_1(s)ds - \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi_2(s)ds| = \max\limits_{a \leq t \leq b} |\lambda \int_a^b K(t,s)(\varphi_1(s) - \varphi_2(s))ds| \leq |\lambda| M(b-a) \max_{a \leq t \leq b} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|$

Так как $\max_{a \leq t \leq b} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| = \rho(\varphi_1, \varphi_2)$, перепишем последнее неравенство в виде:

$$\rho(A\varphi_1, A\varphi_2) \leq |\lambda| M(b-a)\rho(\varphi_1, \varphi_2).$$

Откуда при $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ оператор A будет сжимающим.

По принципу сжимающих отображений для всякого λ такого, что $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ уравнение Фредгольма с непрерывным ядром $K(t,s)$ и непрерывным свободным членом $\varphi(t)$ имеет единственное решение $\varphi_0(t)$, определенное в классе непрерывных на $[a,b]$ функций.

Интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода

Пусть даны X и Y – метрические пространства. Оператор $A: X \to Y$ называется непрерывным в точке $x_0 \epsilon D \in X$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \forall x \in D \ \rho_X(x, x_0) < \delta$$
$$\rho_Y(Ax, Ax_0) < \varepsilon$$

Оператор A называется непрерывным, если он непрерывен в каждой точке своей области определения.

Уравнение Вольтерра имеет вид:

$$f(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)\varphi(s)ds \ \#(6)$$

Ядро $K(t,s)$ непрерывно на замкнутом множестве $G = \{(t,s)|\ a \le t \le b, a \le s \le t\}$, $f(t) \epsilon C[a,b]$.

Уравнение (6) можно рассматривать как частный случай уравнения Фредгольма, наложив на ядро условие $K(t,s) = 0$ при $s > t$

Теорема. [3] Пусть A – непрерывное отображение полного метрического пространства X в себя, отображение A^n при некотором n является сжатым. Тогда уравнение $Ax = x$ имеет единственное решение.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что $A: C[a,b] \to C[a,b]$.

Возьмем произвольные функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \epsilon C[a,b]$.

Рассмотрим

$$|A\varphi_1(t) - A\varphi_2(t)| = |\lambda \int_a^t K(t,s)[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]ds|$$
$$\le |\lambda| M(t-a) \max_{a\le t\le b} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|, \text{где}$$
$$M = \max_{(t,s)\in\Delta} |K(t,s)|$$

Из последней оценки получаем $\forall t \ \in [a,b]$

$$|A\varphi_1(t) - A\varphi_2(t)| \le |\lambda| M \rho_X(\varphi_1, \varphi_2)$$
$$\rho_X(A\varphi_1, A\varphi_2) \le |\lambda| M \rho_X(\varphi_1, \varphi_2)\#(7)$$

Покажем непрерывность оператора A. Возьмем произвольный $\varepsilon > 0$, тогда при $\delta = \frac{\varepsilon}{|\lambda|M(b-a)}$ из условия

$$\rho_X(\varphi_1, \varphi_2) < \delta$$

имеем

$$\rho_X(A\varphi_1, A\varphi_2) < \varepsilon$$

Используем оценку (7):

$$|A^2\varphi_2(x) - A^2\varphi_1(x)| = |\lambda \int_a^t K(t,s)[A\varphi_1(t) - A\varphi_2(t)]ds| \ \le |\lambda|^2 \frac{M^2(t-a)^2}{2!} \rho_X(\varphi_1, \varphi_2)$$

$$|A^n\varphi_2(x) - A^n\varphi_1(x)| \le |\lambda|^n \frac{M^n(t-a)^n}{n!} \rho_X(\varphi_1, \varphi_2) \le |\lambda|^n \frac{M^n(b-a)^n}{n!} \rho_X(\varphi_1, \varphi_2)\#(8)$$

Неравенство (8) выполняется для всех t, значит

$$\rho_X(A^n\varphi_1, A^n\varphi_2) \le |\lambda|^n \frac{M^n(b-a)^n}{n!} \rho_X(\varphi_1, \varphi_2)$$

Из оценки $|\lambda|^n \frac{M^n(b-a)^n}{n!} \rho_X(\varphi_1, \varphi_2) < 1$ понятно, что число n можно выбрать достаточно большим при любом λ. Отсюда следует, что оператор A^n будет являться сжатием при достаточно большом n.

Таким образом, в силу теоремы о принципе сжимающих отображений, оператор A имеет единственную неподвижную точку, что означает, что уравнение Вольтерра 2-ого рода имеет единственное решение при любом λ.

Список использованных источников:

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа: Учеб. Пособие. – М.: Высшая школа, 1982. – 271 с., ил.
3. Треногин В.А. Функциональные анализ: Учебник. – 3-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 488 с. – ISBN 5-9221-0272-9.
4. Kanhaiya Jha, A.B. Lohani, R.P. Pant. A history of fixed point theorems. 2001.
5. Электронный ресурс -http://math.phys.msu.ru/archive/2014_2015/121/Lecture_06.pdf
6. Городецкий В.В. Н.И. Нагнибида, Настасиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу. – К.: Выща шк., 1990 – 479 с.: ил.
7. Хатсон В., Пим Дж. С. Приложения функционального анализа и теории операторов. Пер. с англ. – М.: Мир, 1983, 432 с., ил.
8. Электронный ресурс - https://shodhganga.inflibnet.ac.in/bitstream/10603/165046/4/04_chapter%201.pdf
9. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. – М.: Наука, 1975
10. Метрические пространства: учебное пособие / В. А. Бондаренко, А. Н. Морозов, А. В. Николаев; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2017. – 109 с