УДК 519.651

КОМПЬЮТЕРНЫЙ (ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ) ПОПЕРЕЧНИК КАК ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ КОМПЬЮТЕРНОЙ (ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ) ТОМОГРАФИИ

Темирова Салтанат Талгатовна
temirovast10@gmail.com
Студентка 4 курса специальности 5В060100 - « Математика»
Механико-математического факультета ЕНУ им. Л.Н. Гумилева,
г. Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Абикенова Ш.К.

Компьютерная (вычислительная) томография является одним из методов неразрушающего контроля качества, который нашел широкое применение в различных секторах промышленности, медицине, биологии, геологии. Кратко суть данного метода можно описать следующим образом - по набору рентгеновских проекций получается информация о внутренней структуре объекта в виде распределения коэффициента поглощения рентгеновского изучения. Для получения такой информации применяются различные математические подходы и методы [1].

Нами рассматривается задача под названием «Компьютерный (вычислительный поперечник)», общая постановка которой подробно описана в работах [2-5].

В настоящей работе приведены результаты исследования преобразования Радона в модельной ситуации: при размерности пространства равного $s = 2$ в случае открытого множества $\Omega \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$. Получена формула дискретизации функций по значениям преобразования Радона в точках, порядково точное в пространстве Соболева $H_0^r(\Omega)$, неулучшаемая по числовой информации, полученная от всех линейных функционалов, с установлением в вариантах предельной погрешности вычисления преобразования Радона, сохраняющую неулучшаемую погрешность восстановления по точной информации.

Теоретическую основу исследования составили научные результаты, приведенные в работах [6-10].

Нами, полученные теоретические результаты, апробированы на вычислительных экспериментах восстановления функций f по некоторым значениям ее преобразования Радона, в частности проведена численная реализация алгоритмов, реализующих оценку сверху в следующей теореме, которую обозначили как количественную форму теоремы Радона.

Основная теорема. *Пусть дано открытое множество* $\Omega \subset E^2 \equiv \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$, *число* $r > 0$. *Тогда для класса* $H_0^r(\Omega)$, *определенного через* $W_2^r(\mathrm{E}^2)$, *и всякого* $N = n^2(n = 2,3, \dots)$, *справедливы утверждения*

К(В)П-1. Находится порядок

$$\inf_{l_1,\dots l_N - \text{всевозможные линейные функционалы над } H_0^r(\Omega), \varphi_N} \sup_{f \in H_0^\gamma(\Omega)} \|f(x) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); x)\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\asymp$$

$$\asymp \inf_{(\alpha_\tau, t_\tau) \in E_2 (\tau = 1,\dots,N), \varphi_N} \sup_{f \in H_0^r(\Omega)} \|f(x) - \varphi_N(Rf_\Omega(\alpha_1, t_1), \dots, \varphi_N(Rf_\Omega(\alpha_N, t_N); x)\| \asymp$$

$$\asymp \sup_{f \in H_0^r(\Omega)} \left\| f(x) - \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) R^{-1} D_N\left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \asymp N^{-\frac{r}{2}},$$

где

$$Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) = \int_{b_1\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right)}^{b_2\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right)} f_\Omega\left(\frac{\sqrt{2}k_2}{n} \cos\frac{2\pi k_1}{2} - y \sin\frac{2\pi k_1}{2}, \frac{\sqrt{2}k_2}{n} \sin\frac{2\pi k_1}{2} + y \cos\frac{2\pi k_1}{2}\right) dy$$

и

$$R^{-1}\big(D_N(\alpha, \tau)\big) = R^{-1} D_N(x_1, x_2)$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^\infty \left[\int_{-1/2}^{1/2} \left(\int_{T_{\alpha,t} \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2} \left(\frac{\sin \pi (2n+1)\left(\sqrt{2}t \cos 2\pi\alpha - y \sin 2\pi\alpha\right)}{2 \sin 2\pi \left(\sqrt{2}t \cos 2\pi\alpha - y \sin 2\pi\alpha\right)} \right) \times \right.\right.$$

$$\times\left(\frac{\sin\pi(2n+1)\left(\sqrt{2}t\sin 2\pi\alpha+y\cos 2\pi\alpha\right)}{2\sin 2\pi\left(\sqrt{2}t\sin 2\pi\alpha+y\cos 2\pi\alpha\right)}\right)dy\Bigg)e^{2\pi i\gamma t}dt\Bigg]e^{2\pi i(x_1\gamma cos2\pi\alpha+x_2\gamma sin2\pi\alpha)}\gamma d\gamma d\alpha$$

К(В)П-2 (версия «равно$\tilde{\sigma}_N$»). Для вычислительного оператора

$$\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right) \qquad (1)$$

и для величины $\tilde{\sigma}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}$ выполняются соотношения:

Во-первых,

$$\sup_{f\in H_0^r(\Omega)}\left\|f(x_1,x_2)-\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}+\tilde{\sigma}_N\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \asymp N^{-\frac{r}{2}}$$

Во-вторых, для всякой возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{n=1}^{\infty}$ имеет место равенство

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N\tilde{\sigma}_N\equiv\eta_N N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)};\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right)_{L^2(\Omega)}}{\delta_N\left(0;L_N\left(H_0^r(\Omega)\right)\times\{\varphi_N\}_{L^2(\Omega)}\right)_{L^2(\Omega)}}$$
$$=+\infty$$

К(В)П-3 (версия «не больше $\tilde{\varepsilon}_N$»). Для вычислительного оператора (1) и для величины $\bar{\varepsilon} = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{4}\right)}$ выполняются соотношения:

$$\sup_{\substack{f\in H_0^r(\Omega)\\ \left|\gamma_N^{(k_1,k_2)}\right|\le 1}}\left\|f(x_1,x_2)-\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}(Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)+\gamma_N^{(k_1,k_2)}\bar{\varepsilon})R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|$$
$$\asymp N^{-\frac{r}{2}}$$

Проведены численные эксперименты по дискретизации функций по значениям их преобразований Радона по точной информации. В теоретическом результате в качестве вычислительного агрегата берется обратное преобразование свертки ядра Дирихле по значениям преобразования Радона. Первый вычислительный эксперимент – возвращение значения ядра Дирихле. Второй вычислительный эксперимент - расчет преобразования Радона. Программа возвращает значения преобразования функций f по ее значениям в некоторых ее точках. Преобразование Радона вычисляется встроенной функцией radon(f, theta), которая возвращает преобразование Радона изображения интенсивности f для угла theta градусов. Сначала определяем функцию D.

Аргументы: n-целое положительное, x-действительное (рациональное)

```
function D = Dirichlet(n,x)
if x==0||x==1
   D=n+1/2;
else
   D=sin(pi*(2*n+1)*x)/sin(pi*x)/2;
end
end
```

Снимается информация о функции D виде преобразования Радона R(D) (R(D)-матрица, в которой каждый столбец является преобразованием Радона матрицы $D_{i,j}$= Dirichlet(n,i/N)*Dirichlet(n,j/N) для углов 0,...,Alpha-1 градусов, 1<=Alpha<=180.

```
Alfa=180;
R=radon(f,1:Alfa);
```

Находим размеры преобразования Радона

```
s=size(R);
d1=s(1);
d2=s(2);
```

Для расчета преобразования Радона по предлагаемому алгоритму, возьмем некоторые значения из значений R, остальное будем вычислять по алгоритму.

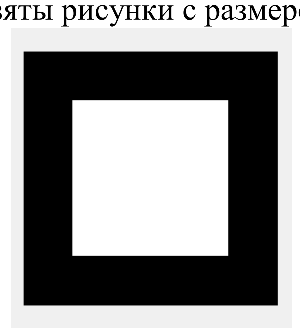
```
n1=2;
n2=4;
n3=fix(d1/n1);
n4=fix(d2/n2);
```

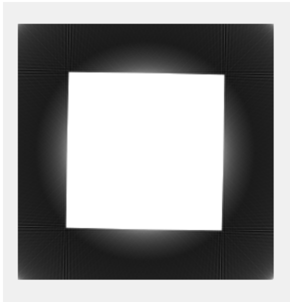
Вычисляется преобразования Радона:

```
Rf=zeros(d1,d2);
for i=1:d1
   for j=1:d2
      M=0;
      for k=1:n1
```

```
                X*Dirichlet(n1, i/d1-k/n1)
                    for l=1:n2
                        M=M+ f(k/n1,l/n2)*X*Dirichlet(n2, j/d2-l/n2);
                    End
                 End
           f1(i,j)=M
              end
           end
           R=radon(f1; 1:Alfa);
```

Тестирование проводилось с параметрами n=(367, 180). В качестве оригиналов были взяты рисунки с размером 256×256.

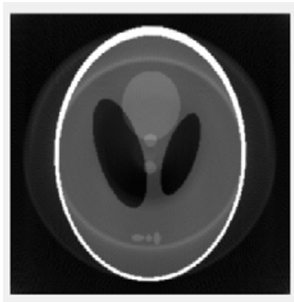




A B c

Квадрат 156 ×156 (а-оригинал, преобразование Радона, восстановленный квадрат)





A B c

Изображение макета головы, которое можно использовать для проверки численной точности восстановления оригинала f по некоторым значениям ее преобразования Радона (а-оригинал, b-преобразование Радона, с-восстановленная).

Как видим, восстановленные изображения имеют искажения. По-видимому, в качестве информации с рисунков использовались не истинные значения преобразования Радона, а их дискретные аналоги. В связи с чем, в дальнейшем будут исследованы степень влияния от этих замен. Таким образом, в соответствии с общей постановкой задачи восстановления функций из классов Соболева в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника нами получены результаты вычислительной реализации по дискретизации функций по значениям их преобразований Радона по точной информации.

Список использованных источников

1. Radon J. Uber die Bestimmung von Funktionen durchihre Integral wertelängs gewisser Mannigfaltigkeiten // Berichte Sächsischte Akademie der Wissenschaften. L.Math.-Phys.Kl. -1917. - №69, С. 262-277.
2. Темиргалиев Н. Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье // Вестн. Евразийск. ун-та им. Л.Н. Гумилева. – 1997. - №3. –С. 90–144.
3. Темиргалиев, Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод квази-Монте-Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье// Вестн. Евразийск. нац. ун-та им. Л.Н. Гумилева. Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. – 2010. - 194 с.
4. Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. - 2018. -Т. 124. - №3. -С. 8-88.
5. Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Компьютерный (вычислительный) поперечник в контексте общей теории восстановления// Известия ВУЗов. Математика. -2019. - №1. -С. 89-97.
6. Темиргалиев Н., Абикенова Ш.К., Ажгалиев Ш.У., Таугынбаева Г.Е. Преобразование Радона в схеме К(В)П-исследований и теории квази Монте-Карло // Изв.вузов. Математика, 2020, 3, 98–104. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-3-98-104.
7. Н.Темиргалиев, Ш.К.Абикенова, Ш.У.Ажгалиев, Г.Е.Таугынбаева,А.Ж. Жубанышева. Теория преобразования Радона концепции Компьютерного (вычислительного) поперечника и методов теории квази Монте-Карло// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика.-2019.- №4.-С. 89-135.