УДК 517.51

ОЦЕНКА СУММ ДВОЙНЫХ КОСИНУС РЯДОВ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА ОРЛИЧА

Хусаинова Айгерим Куанышевна
airisays@mail.ru
студента 4 курса специальности «5В060100-Математика»
механико-математического факультета,
ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель–Н.А. Бокаев

В данной работе рассматриваются двойные косинус ряды в весовых пространствах типа Орлича. Приводится оценка сверху суммы двойных косинус рядов, из которой следует достаточное условие принадлежности суммы пространству типа Орлича.

Будем рассматривать тригонометрический ряд вида

$$\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty} a_{n_1 n_2} \cos n_1 x_1 \cos n_2 x_2 \qquad (1)$$

где для краткости положим $\cos 0 \cdot x_1 = \cos 0 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$.

Будем считать, что коэффициенты этого ряда удовлетворяют условию

$$a_{n_1 n_2} \to 0 \qquad (2)$$

при $n_1 \to \infty$ и любом фиксированном n_2 и при $n_2 \to \infty$ и любом фиксированном n_1. Для целых $k_1 \geq 1, k_2 \geq 1$ обозначим

$$\Delta_{k_1 k_2} a_{n_1 n_2} = \sum_{i=0}^{k_1} (-1)^i C_{k_1}^i \sum_{j=0}^{k_2} (-1)^j C_{k_2}^j a_{n_1+i\, n_2+j}, \Delta_{0,0} a_{n_1 n_2} = a_{n_1 n_2},$$
$$\Delta_{0 k_2} a_{n_1 n_2} = \sum_{j=0}^{k_2} (-1)^j C_{k_2}^j a_{n_1 n_2+j}, \Delta_{k_1 0} a_{n_1 n_2} = \sum_{i=0}^{k_1} (-1)^i C_{k_1}^i a_{n_1+i\, n_2},$$

где $C_n^m = n(n-1) \cdots (n-m+1)/m!$.

Пусть даны числовой ряд

$$\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} c_{n_1 n_2} \qquad (3)$$

и его частичная сумма

$$S_{m_1 m_2} = \sum_{n_2=0}^{m_2} \sum_{n_1=0}^{m_1} c_{n_1 n_2}$$

Говорят, что ряд (3) сходится по Прингсхейму к сумме S ([1, с. 27]), если существует такое S, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся натуральные числа N_1 и N_2такие, что $\left|S_{m_1 m_2} - \mathrm{S}\right| < \varepsilon$ при любых $m_1 > N_1,\ m_2 > N_2$.

Из работы [2] следует, что если последовательность $\{a_{n_1 n_2}\}$ удовлетворяет условию (2), $\Delta_{k_1 k_2} a_{n_1 n_2} \geq 0$ для любых натуральных n_1и n_2 и некоторых $k_1 > 1,\ k_2 > 1$, то ряд (1) сходится по Прингсхейму всюду, кроме, быть может, множества плоской меры нуль. Через $f_c(x_1, x_2)$ обозначим сумму ряда (1).

В работе [2] устанавливается связь между поведением коэффициентов ряда (1) и принадлежностью функции $f_c(x_1, x_2)$ различным $L_{p_1 p_2}$ пространствам.

Результат работы [2] является обобщением известной теоремы Харди – Литтльвуда.

В работе [3] рассмотрены оценки снизу и сверху для сумм одномерных тригонометрических рядов на классах L_φ с весом.

В данной работе доказывается оценка сверху для тригонометрического ряда с кратно монотонными коэффициентами, у которых сумма принадлежит весовому классу $L(\varphi_1, \varphi_2, \omega_1, \omega_2)$.

Для формулировки необходимой теоремы введем определения.

Пусть $\varphi_i \in \Phi, \omega_i \in W\ (i = 1,2)$. Классом $L(\varphi_1, \varphi_2, \omega_1, \omega_2)$ назовем множество измеримых функций $f(x_1, x_2)$, 2π - периодических по каждой переменной и таких, что

$$\int_0^{2\pi} \omega_2(x_2) \varphi_2 \left(\int_0^{2\pi} \omega_1(x_1) \varphi_1(|f(x_1, x_2)|)\, dx_1 \right) dx_2 < \infty.$$

Положим $\widetilde{\omega}(x) = \omega(x) + \omega(\varphi 2\pi - x)$.

Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $\varphi_i \in \Phi, \omega_i \in W$ $(i = 1,2)$. Пусть последовательность $\{a_{n_1 n_2}\}$ удовлетворяет условию (2) и $\Delta_{33} a_{n_1 n_2} \geq 0$. Тогда справедлива оценка

$$\int_0^{2\pi} \omega_2(x_2) \varphi_2 \left(\int_0^{2\pi} \omega_1(x_1) \varphi_1(|f_{22}(x_1, x_2)|)\, dx_1 \right) dx_2 \leq$$

$$\leq C \sum_{n_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n_2+2}}^{\frac{\pi}{n_2+1}} \widetilde{\omega_2}(x_2) d\, x_2 \varphi_2 \left(\sum_{n_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n_1+2}}^{\frac{\pi}{n_1+1}} \widetilde{\omega_1}(x_1)\, dx_1 \varphi_1\big((n_1+1)^2 (n_2 + 1)^2 \Delta_{11} a_{n_1 n_2}\big) \right),$$

где положительная постоянная С не зависит от последовательности $\{a_{n_1 n_2}\}$.

В случае степенных функций $\varphi_1(t) = t^{p_1}, \varphi_2(t) = t^{\frac{p_2}{p_1}} (0 < p_i < \infty)$ и $\omega_i(x_i) \equiv 1 (i = 1,2)$ подобная оценка ранее была получена в [2]. Оценка снизу была получена в работе [4].

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \Delta_{k_1 k_2} a_{n_1 n_2} B_{n_1}^{k_1}(x_1)\, B_{n_2}^{k_2}(x_2) \qquad (4)$$

где

$$B_0^1(x) = \frac{1}{2};\ B_n^1(x) = \frac{1}{2} + \sum_{m=0}^{n} \cos mx \ \text{ для } n \geq 1;$$

$$B_n^k(x) = \sum_{m=0}^{n} B_m^{k-1}(x) \text{ для } k = 2,3, \dots \text{ и } n = 0,1,2, \dots;$$

Заметим, что $B_n^1(x)$ – это ядро Дирихле $D_n(x)$, $B_n^2(x)$ – ядро Фейера $K_n(x)$, умноженное на $n + 1$ [5].

В самом деле

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos nx$$

$$B_n^2(x) = \sum_{m=0}^{n} B_m^1(x) = \sum_{m=0}^{n} D_n(x) = (n+1) \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{n+1} D_n(x) = (n+1) K_n(x)$$

Лемма 1 [2]. Если последовательность $\{a_{n_1 n_2}\}$ удовлетворяет условию (2) и $\Delta_{33} a_{n_1 n_2} \geq 0$ для некоторых $k_1 \geq 1$ и $k_2 \geq 1$и любых n_1и n_2, то

а) ряд (1) сходится по Прингсхейму всюду, кроме, может быть, множества плоской меры нуль, т.е. существует функция $f_c(x_1, x_2)$ - сумма ряда (1)

б) ряд (4) сходится по Прингсхейму всюду, кроме, может быть, множества плоской меры нуль, к функции $f_c(x_1, x_2)$.

Список использованной литературы

1. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. М. :Физматгиз, 1962.
2. Вуколова Т.М., Дьяченко М.И. Оценки смешанных норм сумм двойных тригонометрических рядов с кратно монотонными коэффициентами // Изв. вузов. Матем. 1999. №8. С. 22 -28.
3. Симонов Б.В. О рядах по синусам и косинусам в классах L_φ// Изв. вузов. Матем. 2013. № 10. С. 24 – 42.
4. Симонов Б.В., Вуколова Т.М., Симонова И.Э. Оценки сумм двойных тригонометрических рядов в пространствах с весом // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 20-й международной Саратовской зимней школы. 2020. С. 357 – 363.
5. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М.: Физматлит, 1961. С. 946.