**Қолданылған әдебиеттер тізімі**
1. Zwicky F 1933 *Helv. Phys. Acta* 6 110
2. Freese K Fields B and Graff D 2000 *arXiv: astro-ph/0007.444*
3. Clowe D. *et al.* 2006 *Astrophys. J.* 648 L109
4. Massey R *et al.* 2007 *Nature* 445 286
5. Riess A G *et al.* 1998 *Astron. J.* 116 1009
6. Perlmutter S *et al.* 1999 *Astrophys. J.* 517 565.

ОӘЖ 530.1

# ФОКАС-ЛЭНЕЛЛС ТЕҢДЕУІ ҮШІН ДАРБУ ТҮРЛЕНДІРУІ ЖӘНЕ СОЛИТОНДЫҚ БЕТ

**Имашев Данияр Балғынбекұлы**
andasidb@gmail.com
6М060400-«Физика» мамандығы, 4-курс студенті, Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекші – М.Б. Жасыбаева

Бұл жұмыс солитондар теориясын дифференциалдық геометрияда қолдануға арналған. Осы мақсатпен жақында ұсынылған Фокас-Ленэллс теңдеуі деп аталатын солитон теңдеуі зерттелді, ол Шредингердің сызықсыз теңдеуінің жалпыламасы болып табылады. Сонымен қатар, Дарбу түрлендіруі мен Сим-Тафель (СТ) формуласын қолдану арқылы зерттелетін теңдеудің солитондық беті арасындағы байланыс орнатылды. Сим-Тафель формуласы оның фундаментальды формаларының көмегімен, бетті қайта жаңартуды жеңілдетеді, әртүрлі интегралданатын сызықты еместерді біріктіреді және геометриялық есептерге солитондар теориясының өте тиімді әдістерін қолдануға мүмкіндік береді. Сонымен қатар, алынған нәтижелердің көмегімен Фокас-Ленэллс теңдеуінің екі өлшемді солитонды бетін үш-өлшемді Евклид кеңістігінде ( $R^2 \to R^3$) құрғаннан кейін, оның бірінші, екінші квадраттық формаларын, беттің ауданын және Гаусс қисығын табуға мүмкіндік пайда болады. Үш-өлшемді Евклид кеңістігіндегі беттердің теориясы ғылымның әр түрлі салаларында, атап айтқанда математикада, теориялық физикада және т.б. кеңінен қолданылады [1]. Фокас-Ленэллстің (ФЛ) интегралданатын теңдеуі, ол оптикалық талшықтарда ультра-қысқа төзімді сызықты емес жарық импульстерінің таралуын сипаттайды және келесі түрде беріледі [2]-[3]:

$$iq_{xt} - iq_{xx} + 2q_x - \delta|q|^2 q_x + iq = 0, \tag{1}$$

мұндағы $q(x,t)$ өрістің жүйелі қабықшасын білдіреді, $x$ – таралу қашықтығы, $t$ – $x, t$ аргументтері бойынша ішінара дифференциалдауды білдіретін кешігуші уақыт және *i*-жалған бірлік. Дәл солай, $\delta$ $(\delta = \pm 1)$ – $\delta = 1$ мәнінде өз-өзін назарға шығаруды (самофокусировка), немесе $\delta = -1$ мәнінде болғанда өзін-өзі назардан шығаруды (самодефокусировка) $\delta = -1$.

Қарастырылып отырған теңдеуді интегралданатын болғандықтан, онда интегралданған жүйелер теориясында маңызды рөл атқаратын Лакс жұбы (ЛЖ) бар. Ол нақты шешімдерді құру және бастапқы шарттардың көмегімен асимптотиканы зерттеу үшін шашыраудың кері есептік әдісін қолдануға мүмкіндік береді. Біздің зерттеп отырған теңдеуіміз (1) үшін ЛЖ мына түрде болады:

$$\Phi_x = U\Phi = (-i\lambda^2\sigma_3 + \lambda Q)\Phi, \tag{2}$$

$$\Phi_t = V\Phi = (-i\lambda^2\sigma_3 + \lambda Q + V_0 + \frac{1}{\lambda}V_{-1} - \frac{i}{4\lambda^2}\sigma_3)\Phi, \tag{3}$$

мұндағы $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2)^T$ – $\lambda$ өзіндік мәнінің $2\times 2$ матрицалық өзіндік функциясы (немесе спектралды параметрі) деп аталады.

Мұнда

$$Q=\begin{pmatrix}0 & q_x\\ \bar{q}_x & 0\end{pmatrix},\quad V_0=i\sigma_3-\frac{i\delta|q|^2}{2}\sigma_3,\quad V_{-1}=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0 & q\\ -\bar{q} & 0\end{pmatrix},\qquad \sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

В. Б. Матвеев жүз жыл бұрын Г. Дарбу ұсынған әдіс екінші ретті спектралды есептер немесе қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін кейбір маңызды солитондық теңдеулерге дейін ұзартылуы мүмкін екенін анықтады. Бұл әдіс Дарбу түрлендіруі (ДТ) деп аталған. Кейіннен, бұл әдіс көптеген дифференциалды теңдеулерді шешуде жемісті әрі тиімді екені анықталған. Ол қазіргі уақытта механикада, физикада және дифференциалдық геометрияда маңызды рөл атқарады.

Солитонды бетті құру үшін ДТ-не байланысты $x^1, x^2$, координаттармен және $\mathbf{r}=\mathbf{r}(x^1,x^2)\in\mathbf{R}^3$ ереже векторымен өрнектелген $\sum\subset\mathbf{R}^3$ бетті қарастыру қажет. Бірінші фундаменталды форма мына түрде болады, $I=(\mathbf{r}^{[1]})^2dx^2+2\mathbf{r}_x^{[1]}\mathbf{r}_t^{[1]}dxdt+(\mathbf{r}_t^{[1]})^2dt^2$ (центрдегі нүкте – $\mathbf{R}^3$ қоршаған кеңістіктегі скаляр туындыны білдіреді). Екінші фундаменталды форма мына түрде болады $II=-d\mathbf{n}^{[1]}\cdot d\mathbf{r}^{[1]}$, мұндағы n – нормал бірлік вектор, $\mathbf{n}^{[1]}=\dfrac{\mathbf{r}^{[1]}{}_x\wedge\mathbf{r}^{[1]}{}_t}{|\mathbf{r}^{[1]}{}_x\wedge\mathbf{r}^{[1]}{}_t|}$, онда $\wedge$ $-\mathbf{R}^3$-тегі векторлық көбейтінді. Сондай-ақ, беттің ауданын мына жолмен: $S=\iint_D|\mathbf{r}^{[1]}{}_x\wedge\mathbf{r}^{[1]}{}_t|dxdt$ және Гаусс қисығын беттің бірінші және екінші квадраттық формалары арқылы табуға болады.

Бұдан басқа, ДТ-нің жеке бетін құру үшін СТ формуласын жаңа ДТ терминдеріне қайта жазу керек, яғни

$$r^{[1]}=\left(\Phi^{[1]}\right)^{-1}\Phi_\lambda^{[1]}, \tag{4}$$

ондағы

$$\Phi^{[1]}=T\Phi. \tag{5}$$

Ендеше, ізделініп отырған ФЛ теңдеуіне $T$ операторын былай таңдаймыз

$$T=\lambda N+M+\lambda^{-1}K, \tag{6}$$

бұл жердегі N,M және K матрицалар

$$N=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix}a_0 & b_0\\ c_0 & d_0\end{pmatrix},\ K=\begin{pmatrix}a_{-1} & b_{-1}\\ c_{-1} & d_{-1}\end{pmatrix} \tag{7}$$

яғни,

$$T=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}a_0 & b_0\\ c_0 & d_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{-1} & b_{-1}\\ c_{-1} & d_{-1}\end{pmatrix}\lambda^{-1}.$$

Онда (4) теңдеуді былай жазамыз

$$r^{[1]} = (T\Phi)^{-1}(T\Phi)_{\lambda} = T^{-1}\Phi^{-1}(T_{\lambda}\Phi + T\Phi_{\lambda}) = \Phi^{-1}\Phi_{\lambda} + \Phi^{-1}T^{-1}T_{\lambda}\Phi = r + \Phi^{-1}T^{-1}T_{\lambda}\Phi. \quad (8)$$

Мұнда $r = \Phi^{-1}\Phi_{\lambda}$ Дәл осы СТ формуласы болады:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 & -\overline{\Phi}_2 \\ \Phi_2 & \overline{\Phi}_1 \end{pmatrix}, \; \Phi^{-1} = \frac{1}{\Delta_1}\begin{pmatrix} \overline{\Phi}_1 & \overline{\Phi}_2 \\ -\Phi_2 & \Phi_1 \end{pmatrix}, \; \Delta_1 = |\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 . \quad (9)$$

мұндағы $\Phi_k$ ( $k = 1,2$ ) тек $q = 0$ жағдайда. Яғни

$$\Phi_1 = k_1 e^{-i\lambda^2 x + \left(-i\lambda^2 + i - \frac{i}{4\lambda^2}\right)t + c_1} \quad (10)$$

$$\Phi_2 = k_2 e^{-i\lambda^2 x + \left(-i\lambda^2 + i - \frac{i}{4\lambda^2}\right)t + c_2} \quad (11)$$

$c_2 = -c_1$ деп есептесек, (2),(3), теңдеулерді мына түрде жазамыз:

$$\Phi_1 = k_1 e^{\theta_1} \quad (12)$$

$$\Phi_2 = k_2 e^{\theta_2} \quad (13)$$

(13),(14) теңдеулердің түйіндесі мынадай болады $\overline{\Phi}_1 = \bar{k}_1 e^{\bar{\theta}_1}$ и $\overline{\Phi}_2 = \bar{k}_2 e^{\bar{\theta}_2}$ .
Онда

$$r = \frac{1}{\Delta_1}\begin{pmatrix} \overline{\Phi}_1\Phi_{1\lambda} + \overline{\Phi}_2\Phi_{2\lambda} & \overline{\Phi}_2\overline{\Phi}_{1\lambda} - \overline{\Phi}_1\overline{\Phi}_{2\lambda} \\ \Phi_1\Phi_{2\lambda} - \Phi_2\Phi_{1\lambda} & \Phi_2\overline{\Phi}_{2\lambda} + \Phi_1\overline{\Phi}_{1\lambda} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Осылайша, (9)-(14) теңдеуді (8) теңдеуге қоя отырып, $r^{[1]}$ табамыз және оның көмегімен ФЛ теңдеуінің солитонды беті құрылады.

**Қолданылған әдебиеттер тізімі**

1. The Darboux-Bianchi-Backlund transformation and soliton surfaces. Jan Cie´slin´ski. Proceedings of First Non-Orthodox School on Nonlinearity and Geometry, 81-107 pp., Warszawa 1998
2. The N-order rogue waves of Fokas-Lenells equation. Shuwei Xu, Jingsong He, Yi Cheng, arXiv:1211.5924v, 2012
3. Zhassybayeva M.B., Yesmakhanova K.R. The construction of the (2+1)-Dimensional integrable Fokas-Lenells equation and its bilinear form by Hirota method. International Conference on Technology, Engineering and Science (IConTES), October 26 - 29, 2018 Antalya, Turkey, 61-67 pp.