ӘОЖ 512.81

АҚЫРЛЫ ӨЛШЕМДІ ЛИ АЛГЕБРАСЫНЫҢ АВТОМОРФИЗМДЕРІН ЕСЕПТЕУ.

Шаймардан Гүлжаз
gulzhaz_520@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Наурызбаев Р.Ж.

L – базисі $\{e_i\}$, мұндағы $i = 1, 2, \dots, n$ болатын n өлшемді Ли алгебрасы болсын. Базистік векторларда $[*,*]$ бисызықты операциясы келесідей берілсін:

$$[e_i, e_j] = \Lambda_{ij}^{k} e_k, \tag{1}$$

мұндағы Λ_{ij}^{k} – бисызықты операцияның жіктелу коэффициенттері (L алгебрасының құрымдылық константасы). L алгебрасының $Aut(L)$ автоморфизмдер тобын (1) құрылымдық шарттарын сақтайтын түрлендірулер тобы ретінде қарастыруға болады. $A - Aut(L)$ тобының элементінің матрицалық көрсетілімі болсын (әрі қарай топтың матрицалық көрсетілімін топтың өзі ретінде қарастырамыз). Автоморфизмдер тобы L алгебрасының $\{e_i\}$ базисін жаңа $\{e_{\bar{\imath}}\}$ базисіне төмендегі ереже бойынша түрлендіреді:

$$e_{\bar{\imath}} = A_{\bar{\imath}}^{i} e_i. \tag{2}$$

(1) қатынастарын сақтау шартынан келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$A_{\bar{\imath}}^{i} A_{\bar{\jmath}}^{j} \Lambda_{ij}^{k} = \Lambda_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}^{\bar{k}} A_{\bar{k}}^{k}, \Lambda_{ij}^{k} = \Lambda_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}^{\bar{k}}. \tag{3}$$

(3) екінші ретті сызықты емес алгебралық теңдеулер жүйесі болып табылады. [1] жұмысында автоморфизмдер тобы (3) теңдеуі арқылы табылды. Осы есептің линеаризациясын қарастырайық. Автоморфизмдер тобы Ли тобы болғандықтан Aматрицасын келесі түрде жазуға болады:

$$A(x) = \exp\left(x^i \alpha_i\right), A(0) = E, \tag{4}$$

мұндағы, α_i – $Aut(L)$ тобының $aut(L)$ Ли алгебрасының автоморфизмі, $\{x^i\}$ – тобындағы локальды координаттары, E – сәйкес өлшемді бірлік матрица.

(3) теңдеуін x^i айнымалысы бойынша $x^i = 0, \forall i$ нүктесінде дифференциалдайық. Нәтижесінде (i-ді бекітсек) келесі теңдікті аламыз:

$$\propto_{\bar{\imath}}^{i} \Lambda_{i\bar{\jmath}}^{k} + \propto_{\bar{\jmath}}^{j} \Lambda_{\bar{\imath}j}^{k} = \Lambda_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}^{\bar{k}} \propto_{\bar{k}}^{k}. \tag{5}$$

(5) – сызықты алгебралық теңдеулер болып табылады. Осы теңдеулер жүйесін шешіп, $aut(L)$ алгебрасының сызықты тәуелсіз базисін табамыз. (5) – сызықты алгебралық теңдеулер жүйесінің сызықты тәуелсіз шешімдер саны $aut(L)$ алгебрасының өлшеміне тең.

Осы жерде бірнеше ескерту жасайық. Біріншіден, көрсетілген есептеу схемасында $Aut(L)$ тобының дискретті ішкі тобы жоғалады. Бірақ көптеген маңызды қолданбаларында бізге негізінен үзіліссіз автоморфизмдер қажет. Ал дискретті ішкі топты қосымша басқа есеп ретінде қарастыруға болады. Екіншіден, барлық автоморфизмдер ішкі және сыртқы болып екі топқа бөлінеді. Ішкі автоморфизмдер алгебраның құрылымымен толық анықталады. Сондықтан, бізге тек сыртқы автоморфизмдерді іздеу ғана қалды.

Сыртқы автоморфизмдер кеңістігін ішкі автоморфизмдер кеңістігінің ортогонал толықтауышы деп есептеуге болады, сондықтан толық алгебраны осы екі кеңістіктің тура қосындысы ретінде қарастырамыз.

Матрицалар жиынында скаляр көбейтіндіні анықтайық:

$$(L, M) = tr\, L^{+} \cdot M, \tag{6}$$

мұндағы, L^{+} – M матрицасының эрмиттік түйіндестірілуі. (6) қатынасы скаляр көбейтіндінің барлық қасиетін қанағаттандыратынын оңай тексеруге болады. β_j – сыртқы автоморфизмдер алгебрасының базисі болсын. $\propto_i$ – толық автоморфизмдер алгебрасының базисі болғандықтан:

$$\beta_j = y_j^i \alpha_i, \tag{7}$$

мұндағы y_j^i – β_j базисінің α_i базисі бойынша жіктелуіндегі коэффициенттері. Сол жағынан базистік C_e матрицасына скаляр көбейтсек

$$(C_e^+, \beta_j) = y_j^i (C_e^+, \alpha_i)$$

теңдігін аламыз. Теңдіктің сол жағы нөлге тең. Бұдан (7) жіктелуін анықтайтын y_j^i шамалары

$$y^i (C_e^+, \alpha_i) = 0 \tag{8}$$

теңдеулер жүйесінің шешімі болатынын көреміз.

Сонымен, (8) қатынасы сыртқы автоморфизмдерді іздеу есебін аяқтайды.

Мысал үшін, барлық 4 өлшемді Ли алгебралар үшін (олардың классификациясын [2] монографиясынан табуға болады) автоморфизмдер алгебрасын табайық. Төменде L Ли алгебрасының *Aut*(*L)* тобын туындататын

$$A = \sum_{i=1}^{\dim aut(L)} x^i \propto_i$$

матрицалары келтірілген.

I типті алгебра

$$A = \begin{bmatrix} x^4 + x^5 & x^1 & x^2 & x^3 \\ 0 & x^4 & 0 & x^2 \\ 0 & 0 & x^5 & (1-c)x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} c \in R.$$

II типті алгебра

$$A = \begin{bmatrix} 2x^2 & -x^5 & -x^5 + x^4 & x \\ 0 & x^2 & x^3 & x^4 \\ 0 & 0 & x^5 & x^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

III типті алгебра

$$A = \begin{bmatrix} -qx^3 + 2x^4 & x & -qx^1 + x^5 & x^2 \\ 0 & -qx^3 + x^4 & -x^3 & x \\ 0 & x^3 & x^4 & x^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

IV типті алгебра

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & x^2 \\ 0 & x^3 & x^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

V типті алгебра

$$A = \begin{bmatrix} x & -x^3 & x^2 & -x^4 \\ x^3 & x & x^4 & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

VI типті алгебра

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & x^2 \\ 0 & x^2 & 0 & x^4 \\ 0 & 0 & x^5 & x^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

VI_1 типті алгебра

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & x^2 \\ x^3 & x & 0 & x^4 \\ 0 & 0 & x^5 & x^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

VII типті алгебра

$$A = \begin{bmatrix} -x^3 & x^1 & 0 & 0 \\ 2x^2 & 0 & 2x & 0 \\ 0 & x^2 & x^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^4 \end{bmatrix}.$$

VIII типті алгебра

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -x & -x^2 & 0 \\ x & 0 & -x^3 & 0 \\ x^2 & x^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^4 \end{bmatrix}.$$

ҚОЛДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ:

1. Левичев А.В. *Однородная, хроногеометрия.* Новосибирск: НГУ, 1991. 50 с.
2. Петров А.З. Пространства Эйнштейна. М.: Физматгиз, 1961. 464 с.