ӘОЖ 511.524

БРОКАР-РАМАНУДЖАН ЖОРАМАЛЫ ТУРАЛЫ

Дауыл Ұлан
Akyik.kz.777@mail.ru
Л.Н. Гумилев атындағыЕуразия Ұлттық Университеті
«Алгебра және геометрия» кафедрасының докторанты
Нұр-Сұлтан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі – Е.Р. Байсалов

1876 жылы француз ғалымы Анри Брокар [1]$x!+1=y^2$теңдеуінің натурал шешімдері туралы сұрақ қойып, сол сұрағын 9 жылдан соң тағы қайталады [2]. Әйгілі Сриниваса Рамануджан [3], сірә оған Брокардың мақалалары беймәлім болса керек, 1913 жылы осы мәселені мынадай түрде тұжырымдады: «$1+n!$ саны n-нің 4,5 және 7 мәндері үшін толық квадрат болады. Басқа мәндерін табыңыз.»

Қазіргі заманда бұл мәселе әлем математиктері арасында келесі жорамал түрінде тарап кеткен:

Брокар-Рамануджан жорамалы. Диофанттық $x!+1=y^2$ теңдеуінің тек қана үш натурал шешімі бар: (4,5), (5,11) және (7,71).

Мен осы мәселе төңірегінде зерттеулер жасап, осы мәселенің кейбір жалпыламаларын қарастырдым. Біріншіден, біз мынадай жәйтті байқайық: $1+n!$ саны толық квадрат болуы үшін $n!$ санының айырмасы 2-ге тең екі натурал санның көбейтіндісіне жіктелуі қажет және жеткілікті (шынында да $1 + n! = m^2$теңдігі$n! = (m-1)(m+1)$теңдігіне эквивалентті). Сондықтан осы мәселемен

$$\Delta(n) = \min\{|k - l|:\ k \cdot l = n!;\ k, l \in \mathbb{N}\}$$

функциясы тығыз байланысты. Мысалы, Брокар-Рамануджан жорамалын Δ-ны тілге тиек ете былайша пайымдауға болады: «$\Delta(n) = 2$ болу үшін $n = 4{,}5$ немесе 7 болуы қажет».

Лемма. Әрбір натурал $n > 1$ үшін $\Delta(n) > 0$ болады.

Дәлелдемесі:$\Delta(n) = 0$ болуы үшін $n!$ саны толық квадрат болуы қажет және жеткілікті. Сондықтан $n > 1$ үшін $n!$ саны толық квадрат болмайтынын көрсетсек жеткілікті.

Егер $n = 2k$ жұп сан болса, онда Бертран-Чебышев теоремасы бойынша (k, n) аралығынан p жай саны табылады; ал, егер $n = 2k + 1$ тақ сан болса, осындай p жай саны $(k + 1, n]$ аралығынан табылады. Екі жағдайда да $n!$ саны p-ға бөлініп, p^2-қа бөлінбейді, сондықтан толық квадрат бола алмайды. Лемма дәлелденді.

Кәдімгі тілмен айтқанда, $\Delta(n)$ мәні көбейтіндісі $n!$ болатын екі натурал санның ең кіші мүмкін айырмасын көрсетеді. Мен осыған ұқсас тағы екі функцияны анықтадым: $\Delta_0(n)$ ($\Delta_1(n)$) функциясы көбейтіндісі $n!$ болатын екі натурал санның ең кіші жұп (тақ) мүмкін айырмасына тең. Оларды математикалық қатаң анықтамаларын берейік:

$$\Delta_\varepsilon(n) := \min\{|k - l|:\ k \cdot l = n!;\ k, l \in \mathbb{N};\ |k - l| \equiv \varepsilon \bmod 2\}, \varepsilon = 0{,}1.$$

Мен өз зерттеуімде Δ-мен қатар Δ_0 және Δ_1 функцияларының да қасиеттерін зерттеп, олар жайлы жорамал жасап, сол жорамалдарды дәлелдеуге тырыстым. Зерттеу кезінде n-нің мәні [0,50] аралығында болған кездегі осы функциялардың мәндерін MAPLE программалық топтамасын қолданып есептедім. Есептеулер нәтижесінің [0,20] аралығындағы фрагменті төмендегі кестеде көрсетілген. Кестеге түсініктеме: әрқашан $\Delta = \Delta_0$немесе $\Delta = \Delta_1$ болуы тиіс; егер $\Delta = \Delta_0$ болса, онда $\Delta_0 < \Delta_1$, ал егер $\Delta = \Delta_1$ болса, онда $\Delta_1 < \Delta_0$. Егер Δ_iанықталмаса, онда кестенің сәйкес шаршысына $\emptyset$ символы жазылады. Мынадай қызық жәйт байқалады: көп жағдайда $\Delta = \Delta_0$ болады, ал $\Delta = \Delta_1$ жағдайы өте сирек кездеседі. Сондықтан мен $\Delta = \Delta_1 = 1$жағдайы үлкен сандар үшін ($n > 3$ болғанада) орындалмайтындығын оңай дәлелдеуге болады деп үміттенген едім.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Δ	0	0	1	1	2	2	6	2	18	54	30	36	576	127	840	928	3712	20160	93696	420480	800640
Δ_0	0	0	$\emptyset$	$\emptyset$	2	2	6	2	18	54	30	36	576		840	928	3712	20160	93696	420480	800640
Δ_1	$\emptyset$	$\emptyset$	1	1	5	7	29	17	183	73	233	163	771	127	4811	*	*	*	*	*	*

Мені Δ_1 туралы келесі болжам қатты қызықтырды.

Жорамал 1:Әрбір натурал $n > 3$ үшін $\Delta_1(n) > 1$ болады.

Бұл жорамалды шешу мынадай есепке алып келеді. $\Delta(n) = \Delta_1(n) = 1$болсын. Онда $n!$айырмасы 1-ге тең болатын екі натурал санның көбейтіндісіне жіктеледі. Айырмасы 1 болатын екі натурал сан өзара жай болатыны белгілі. Сондықтан, егер біз $n!$ санының жай сандардың дәрежелерінің көбейтіндісіне канондық жіктеуін алып, сонан соң сол дәрежелерді, көбейтінділерінің айырмасы ең кіші мәнге ие болатындай етіп, екі топқа бөлсек, осы ең кіші мән $n > 3$ үшін 1-ден үлкен болатынын дәлелдеу қажет және жеткілікті. Бұл әйгілі таразы басын теңестіру есебіне өте ұқсайды.

Осыған ұқсас n! санының екі көбейткішке жіктелуіне байланысты көптеген есептер (ішінде Брокар-Рамануджан жорамалы да бар) мені қатты қызықтырды.Оқырманды өзіміздің негізгі жорамалымызбен таныстырайық.

Жорамал 2:$\Delta(n)$, $\Delta_0(n)$ және $\Delta_1(n)$ функцияларының әрқайсысы n-мен бірге $+\infty$-ке ұмтылады.

Біз $\Delta = 1$мәселесінің рационал жуықтату (аппроксимация) есептерімен тығыз байланысты екенін көрсетейік. Егер $[0, n]$аралығында жатқан барлық жай сандардың $\{2, 3, \dots, q\}$жиынын(мұндағы $q = n$ болуы мүмкін) Pарқылы белгілесек, онда

$$n! = \prod_{p \in P} p^{\alpha_p}$$

канондық жіктелуін жаза аламыз; әрбір $p \in P$ үшін

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^i}\right]$$

екені белгілі (мұнда әдеттегідей $[x]$ арқылы x санының бүтін бөлігі белгіленген).

Енді $2, 3, \dots, q$ жай сандарының бүтін дәрежелерінің ешбір бейтривиал көбейтіндісі 1-ге тең болмайтындықтан, $\ln 2, \ln 3, \dots, \ln q$сандарының ешбір бейтривиал бүтін сызықты комбинациясы 0-ге тең болмайды. Басқа сөзбен айтқанда, $\ln 2, \ln 3, \dots, \ln q$сандары рационал сандардың $\mathbb{Q}$ өрісі үстінде сызықтық тәуелсіз болады.Сызықтық комбинациямыздың коэффициенттері ретінде кез келген бүтін сандарды пайдалануға ерік берілсе, сызықтық тәуелсіздіктің салдарынан ол комбинацияны 0-ге кез келген дәлдікпен жуықтата аламыз. Ал, егер $\ln p$векторының коэффицтенті тек қана $\pm\alpha_p$ бола алатын болса біз $\Delta = 1$ мәселесімен байланысты рационал жуықтату есебін аламыз.

Шынында да, $n! = m(m+1)$жәнебір $A \subset P$ үшін$m = \prod_{p \in A} p^{\alpha_p}$, $m + 1 = \prod_{p \in P \setminus A} p^{\alpha_p}$болсын; біз бұл жерде m және $m+1$ сандарының өзара жай екенін пайдаландық. Енді біз

$$\left(\prod_{p \in P \setminus A} p^{\alpha_p}\right) \Bigg/ \left(\prod_{p \in A} p^{\alpha_p}\right) = \frac{m+1}{m} = 1 + \frac{1}{m}$$

теңдеуінің екі жағын да логарифмдесек,

$$\sum_{p \in P \setminus A} \alpha_p \ln p - \sum_{p \in A} \alpha_p \ln p = \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

теңдеуін аламыз. Ары қарай $m = \left[\sqrt{n!}\right]$және $\ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) \approx \frac{1}{m}$ екенін ескеріп, мынадай есеп аламыз.

Рационал жуықтату есебі: Кез келген натурал$n > 3$және $A \subset P = \{2, 3, \dots, q\}$ үшін теңсіздікті дәлелдеңіз:

$$\sum_{p \in P \setminus A} \alpha_p \ln p - \sum_{p \in A} \alpha_p \ln p > \frac{1}{\left[\sqrt{n!}\right]}.$$

Менің ойымша, бұл есепті шығарсақ, 1-жорамалды дәлелдеу қиын болмайды.

Б. Берндт және У. Гэлуэй 2000 жылы Брокар-Рамануджан жорамалын$[0, 10^9]$ аралығында жатқан x-тер үшін тексеріп шықты [4]. Олар қолданған әдістің негізгі идеясы мынадай: 10^9-дан кейінгі алғашқы 40 жай санды алайық, $\{p_1, p_2, \dots, p_{40}\}$болсын. $x! + 1$ саны квадрат болмайтындығын дәлелдеу үшіносы жай сандардың әрқайсысы үшін

$$\left(\frac{x! + 1}{p_i}\right)$$

Лежандр символының мәнін есептейміз. Егер олардың біреуі үшін символдың мәні (-1)-ге тең болса, онда x-ты тексеруді доғарамыз, себебі бұл $x! + 1$ саны квадрат емес деген сөз.

Сонымен қатар, Брокар-Рамануджан жорамалына қатысты соңғы жаңалық мынадай: Р.Д. Мэтсон [4] жұмысында қолданылған квадраттық қалындылар әдісін қайталай қолданып,

x-тың мәні $[0, 10^{12}]$ аралығында жатса осы гипотезаның ақиқат болатындығына компьютердің көмегімен көз жеткізді [5].

Бұл жұмысты іске асыруға ол кәдімгі үй компьютерін қолданған, жұмысты атқаруға 16 ай уақыт жұмсаған. Автордың айтуынша, 704282301652 және 728972865656 сандары жоғарыда сипатталған 40 жай санның 39-нан ұсталмай өткен де (яғни, 39 жай сан үшін Лежандр символының мәні 0 немесе 1 болып шыққан), тек 40-шы жай санға ұсталған (яғни, Лежандр символы (-1)-ге тең).

Қолданылған әдебиеттер

1. H. Brocard, *Question 166*, Nouv. Corresp. Math. **2**.-1876.-P.287.
2. H. Brocard, *Question 1532*, Nouv. Corresp. Math. **4**.-1885.-P.391.
3. S. Ramanujan, *Question 469*, J. Indian Math. Soc. **5**.-1913.-59.
4.B. Berndt and W. Galway, *The Brocard-Ramanujan Diophantine Equation*$n! + 1 = m^2$, The Ramanujan Journal **4**.-2000.-P.41-42.
5.R. D. Matson, *Brocard's Problem 4th Solution Search Utilizing Quadratic Residues*, Unsolved Problems in Number Theory, Logic and Cryptography.- 2017.