УДК 517.956

ГРАФ-ЖҰЛДЫЗДА БЕРІЛГЕН $-y'' + q(x)y = \lambda y$ ТЕҢДЕУІНІҢ ШЕШІМІ

Мархан Айнұр, Абдулина Перизат
markhan.aynur@mail.ru, perizat.abdulina@mail.ru
Казахстан, Нур-Султан, Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ,

Математикалық және компьютерлік модельдеу
кафедрасының магистранттары,
Ғылыми жетекшісі – К. Сулейменов

Жұмыста Γ графта берілген дербес туындылы теңдеу үшін айнымалыны ажырату әдісін Штурм-Лиувилль есебінің Γ графтағы меншікті функциялары бойынша жіктеудіңмаңызды есебіне алып келетіннегізгі сұрақтары зерттелінеді.

Бұл жұмыста [1] монографияда қолданылған түсініктер мен белгілеулерді пайдаланамыз. $\Gamma - \gamma_k$, $k=\overline{1,m}$ қабырғасыжәнеξ түйіндерінен тұратынгеометриялық граф-жұлдыз болсын; әрбір γ_k, $k=\overline{1,m-1}$ қабырғасы $[0,\pi/2]$ кесіндісімен, ал γ_m қабырғасы $[\pi/2,\pi]$кесіндісімен параметрленген,жобалау γ_k, $k=\overline{1,m-1}$ қабырғасында– ξ түйініне, γ_m-де – ξ түйінінен болады. $x\in\gamma_k$ жазуы γ_k қабырғасы әрбір x нүктесінде $0\le x\le\pi/2$ немесе $\pi/2\le x\le\pi$, $x=\pi/2\in\gamma_k$ (k бекітілген, $k=\overline{1,m}$, x нүктесінің ξ түйініне жататынын білдіреді) сандық мәндерінде берілетінін көрсетеді. $f(x)$ функциясының γ_k қабырғасында тарылуы $f(x)_{\gamma_k}$ арқылы белгіленеді. $C(\Gamma)$– Γ -дағы үзіліссіз функциялардың жиыны, $C[\Gamma]$ – үздіксіз үзіліссіз функциялардың жиыны (қабырғалардағы үзіліссіздік, әр түрлі қабырғалар бойынша түйіндердегі шектер әртүрлі болуы мүмкін, функциялар ешқандай мәнге ие емес), $C^2[\Gamma]$ – екінші ретті туындыларына дейін $C[\Gamma]$-да жататын функциялардың жиыны.

Γ графта берілген Штурм-Лиувилль есебі – бұл графтың γ_k, $k=\overline{1,m-1}$ қабырғасында

$$-y''+q(x)y=\lambda y,\ x\in\gamma_k \tag{1}$$

теңдеуін қанағаттандыратын $y(x)\in C(\Gamma)\bigcap C^2[\Gamma]$функциясын іздеу есебі, спектральді параметр деп аталатын қандай да бір λ кезіндеξ түйінінде

$$\sum_{k=1}^{m-1} y'\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\gamma_k} = y'\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\gamma_m} \tag{2}$$

қатынасы және

$$y'(0)_{\gamma_k}-hy(0)_{\gamma_k}=0,\ k=\overline{1,m-1},\ y'(\pi)_{\gamma_m}+Hy(\pi)_{\gamma_m}=0, \tag{3}$$

шектік шарттары болсын. Келесі шарттар орындалады деп тұжырымдайық: h_k, $k=\overline{1,m-1}$ және H – нақты, $q(x)\in C(\Gamma)$ нақты мәнді функция болсын. (1), (2) қатынастары Γ байланысты жиынындағы бірыңғай теңдеуді жүзеге асыру ретінде қарастырылады, сондықтан оларды Γ графтағы теңдеу деп атайды.

Меншікті мәндер мен меншікті функциялардың қасиеттерін тереңдетіп қарастырып, (1), (2) теңдеулерді шешу үшін асимтотикалық формуланың негізінде (1)-(3) шекаралық шарттарға Грин формуласының қасиеттерін пайдаланамыз.

Ары қарай [4] монографияда дәлелдеуі көрсетілген белгілі теорема қажет болады. $Q_k(x)$, $x\in[0,\pi]$, $k=\overline{1,m-1}$функциясын келесідей анықтайық:

$$Q_k(x)\equiv q(x)_{\gamma_k},\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], Q_k(x)\equiv q(x)_{\gamma_m},\ x\in\left[\frac{\pi}{2},0\right].$$

Теорема. Кез-келген бекітілген $k=\overline{1,m-1}$ жәнекез-келген α үшін

$$-z_k''+Q_k(x)z_k=\lambda z_k \tag{4}$$

теңдеуінің $z_k(0,\lambda)=\sin\alpha,\ z_k'(0,\lambda)=-\cos\alpha$ болатындай $z_k(x,\lambda)\in C^1[0,\pi]\bigcap C^2(0,\pi)$ жалғыз ғана шешімі бар болады. Әрбір бекітілген $x\in[0,\pi]$ үшін $z_k(x,\lambda)$ функциясы λ -дан бүтін аналитикалық функциясы болады.

Әрбір бекітілген k, $k=\overline{1,m-1}$ үшін

$$\mu_k(x,\lambda),\ \eta_k(x,\lambda)\in C^1[0,\pi]\bigcap C^2(0,\pi)$$

функциясы $\mu_k(\pi/2,\lambda)=1,\ \mu_k'(\pi/2,\lambda)=0,\ \eta_k(\pi/2,\lambda)=0,\ \eta_k'(\pi/2,\lambda)=1$ сәйкесінше ($x\in[\pi/2,\pi]$ кезінде $\mu_k(x,\lambda),\ \eta_k(x,\lambda)$ функциялары k индексінен тәуелсіз, яғни $\mu_k(x,\lambda)=\mu(x,\lambda),\ \eta_k(x,\lambda)=\eta(x,\lambda),\ x\in[\pi/2,\pi]$) бастапқы шарттарын қанағаттандыратын (4) теңдеудің шешіміболсын. Онда

$$\underset{\left(k=\overline{1,m-1}\right)}{w_k(x,\lambda)}=\begin{cases}\delta_{ik}\eta_k(x,\lambda), & x\in\gamma_i, i=\overline{1,m-1},\\ \eta(x,\lambda), & x\in\gamma_m,\end{cases}$$

$$w_m(x,\lambda)=\begin{cases}\mu_k(x,\lambda), & x\in\gamma_k, k=\overline{1,m-1},\\ \mu(x,\lambda), & x\in\gamma_m\end{cases} \tag{5}$$

функциялары (1), (2) теңдеулердің сызықты тәуелсіз шешімі болады.Мұндағы δ_{ik} – Кронекер символы:

$$\delta_{ik}=\begin{cases}1, & i=k,\\ 0, & i\neq k.\end{cases}$$

Яғни

$$w_1(x,\lambda)=\begin{cases}\delta_{i1}\eta_1(x,\lambda), & x\in\gamma_i, i=1,2\\ \eta(x,\lambda), & x\in\gamma_3,\end{cases}$$

$$w_2(x,\lambda)=\begin{cases}\delta_{i2}\eta_2(x,\lambda), & x\in\gamma_i, i=1,2\\ \eta(x,\lambda), & x\in\gamma_3,\end{cases}$$

$$w_3(x,\lambda)=\begin{cases}\mu_1(x,\lambda), & x\in\gamma_1,\\ \mu_2(x,\lambda), & x\in\gamma_2,\\ \mu_3(x,\lambda), & x\in\gamma_3.\end{cases}$$

1) $w_1,...,w_m$ - (1), (2) теңдеулердіңшешімі;

2) $c_1w_1+c_2w_2,...,c_mw_m=0\Rightarrow c_1=c_2=...=c_m=0$ сызықты тәуелсіз болады.

$$-y''+q(x)y=\lambda y,$$

теңдеуі бойынша графта келесі теңдеуді қарастырамыз:

$$-w_k''+q(x)w_k=\lambda w_k$$

$$-w_1''+q(x)w_1=\lambda w_1$$

$$\begin{cases}-\eta_1''(x,\lambda)+q(x)\eta_1(x,\lambda)=\lambda\eta_1(x,\lambda)\\ -\eta''(x,\lambda)+q(x)\eta(x,\lambda)=\lambda\eta_1(x,\lambda)\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\mu_1''(x,\lambda)+q(x)\mu_1(x,\lambda)=\lambda\mu_1(x,\lambda)\\ -\mu''(x,\lambda)+q(x)\mu(x,\lambda)=\lambda\mu(x,\lambda)\end{cases}$$

Бірінші жүйені $\mu_1(x,\lambda)$, $\mu(x,\lambda)$, ал екінші жүйені $\eta_1(x,\lambda)$, $\eta(x,\lambda)$-ге көбейтіп бір-бірінен азайтсақ:

$$-\mu_1(x,\lambda)\eta_1''(x,\lambda)+\eta_1(x,\lambda)\mu_1''(x,\lambda)=0$$

Айнымалыны ажырату әдісін пайдаланып, теңдеудің айнымалысын ажыратамыз. Фурье әдісін қолданып, теңдеудің шешімін табамыз:

$$\begin{cases}\mu_k(x,\lambda)=C_1\cos\lambda_k+C_2\sin\lambda_k\\ \eta_k(x,\lambda)=C_3\cos\lambda_k-C_4\sin\lambda_k\end{cases}$$

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин,В.Л. Прядиев,А.В. Боровских,К.П. Лазарев,С.А. Шабров, Дифференциальные уравнения на геометрических графах, Физ-матлит, М., 2004.

2. В.В. Провоторов, Собственные функциизадачи Штурма-Лиувилля на графе-звезде, Матем. сб., 2008, том 199, номер 10, 105-126.

3. М.Г. Завгородний, «Спектральная полнота корневых функций краевой задачи на графе», Докл. РАН, 335:3 (1994), 281-283.

4. Э.Ч. Титчмарш. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальным уравнениям второго порядка, ч. 1, ИЛ, М., 1960; пер. С анг.: titchmarsh, Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, Clarendon Press, Oxford, 1946.