ӘОЖ 517

УАҚЫТ МАСШТАБЫНДАҒЫ ДИНАМИКАЛЫҚ ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ТЕҢДЕУІ

Шалдыбаева Адия Дауыловна
adiyashaldybaeva@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ Іргелі математика кафедрасының студенті
Нур-Султан, Қазақстан.
Ғылыми жетекшісі – Шаймардан С.

Нақты сандар жиынының тұйық ішкі жиынын уақыт масштабы деп атаймыз. Келесі жазуларда уақыт масштабын T символымен белгілейміз [1]. Дифференциалдық теңдеулерді шешуде уақыт масштабы ретінде нақты сандар жиынын алатын болсақ, онда жалпы нәтиже дифференциалдық теңдеулер курсында оқылатын қарапайым дифференциалдық теңдеулер нәтижелерімен сәйкес келеді. Бірақ нақты сандар жиыны мен бүтін сандар жиынынан басқа да көптеген уақыт масштабтары бар болғандықтан, біреуінде әлдеқайда жалпы нәтиже бар. Жоғарыда айтығандарды қорытындылай келе, унификация және кеңейту – уақыт масштабын есептеудегі негізгі екі ерекшелігі болып табылады.

Уақыт масштабындағы алға секіру операторы және артқа секіру операторы келесі түрде анықталады $\sigma(t) := \inf\{s \in R, s > t\}$, $\rho(t) := \sup\{s \in R, s < t\}$. Егер $\sigma(t) = t$ ($\rho(t) = t$) орындалса, онда tнүктесі оң жақты тығыз (сол жақты тығыз) деп аталады [1].

Ал түйіршікті функция деп $\mu(t) := \sigma(t) - t$ түрінде анықталған $\mu : T \to [0, \infty)$ функциясын атаймыз[1].

Айталық $f : T \to R$ және $t \in T^k$ болсын. Кез келген $\varepsilon > 0$ үшін tнүктесінің U (қандай да бір $\delta > 0$ үшін $U = (t - \delta, t + \delta) \cap T$) маңайы табылып,

$$\left|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]\right| \le \varepsilon \left|\sigma(t) - s\right|$$

теңсіздігін қанағаттандыратын $f^{\Delta}(t)$ саны f функциясының t нүктесіндегі *дельта(немесе Хилгер (Hilger)) туындысы* деп аталады [1]. $f : T \to R$ функциясы регулярлы деп аталады егер оныңT-ғы оң жақты тығыз нүктелерінде ақырлы оң жақты шегі бар болса және T-ғы сол жақты тығыз нүктелерінде ақырлы сол жақты шегі бар болса [1]. Ал $f : T \to R$ функциясы оң жақты үзіліссіз (rd-continuous) деп аталады егер ол T-ғы оң жақты тығыз нүктелерінде үзіліссіз және T-ғы сол жақты тығыз нүктелерінде ақырлы сол жақты шегі бар болса [1].Оң жақты үзіліссіз $f:T\to R$ функциялар жиынын $C_{rd}=C_{rd}(T;R)$ арқылы, ал к-ретті дифференциалданатын және туындысы оң жақты үзіліссіз болатын $f:T\to R$ функциялар жиынын $C_{rd}^{k}=C_{rd}^{k}(T;R)$ түрінде белгілейміз.Уақыт масштабында анықталған функцияның Коши (дельта) интегралы $\int_a^b f(t)\Delta t=F(b)-F(a)$ түрінде анықталады [1]. Егер $T=R_{q,+}=\{q^n : n\in Z,\ 0<q<1\}$ болса, онда $\int_0^\infty f(x)d_q x=(1-q)\sum_{m=-\infty}^{\infty}q^m f(q^m)$ ([2] қараңыз). Експоненталдық функция барлық $t\in T,\ s\in T^k$ үшін $e_p(t,s)=\exp\left(\int_{t_0}^{t}\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right)$ түрінде анықталады. Мұндағы $p:T^k\to R$ регрессивті және оң жақты үзіліссіз функция, ал $\xi_h(z)=\begin{cases}\dfrac{\log(1+hz)}{h}, & h.>0\\ z, & h=0\end{cases}$ цилиндр түрлендіруі[1].

Айталық $T=R_{q,+}$ болсын. Онда q-нақты саны $[\alpha]_q$ келесі түрде анықталады [2]: $[\alpha]_q:=\dfrac{1-q^\alpha}{1-q}$, мұндағы $\forall\alpha\in K$ және $\lim_{q\to1}\dfrac{1-q^\alpha}{1-q}=\alpha$.

Ал биномиалды коэффициенттің q-аналогы келесі түрде анықталады [2]:

$$[n]_q!:=\begin{cases}1, & \text{егер}\, n=0,\\ [1]_q\times[2]_q\times\ldots\times[n]_q, & \text{егер}\, n\in N.\end{cases}$$

Сондай-ақ, q-Гамма функция[2]:

$$\Gamma_q(x)=\frac{(q,q)_q^\infty}{(q^x,q)_q^\infty}(1-q)^{1-x},$$

мұндағы $(x,a)_q^0=1,\ (x,a)_q^n=\prod_{k=0}^{n}(x-aq^k),\ (x,a)_q^\infty=\lim_{n\to\infty}(x,a)_q^n.$

Және де экспоненталық функцияның q-аналогы келесі түрінде анықталады [2]:

$$\exp(z;q^2)=\cos(-iz;q^2)+i\sin(-iz;q^2),$$

мұндағы q-аналогты тригонометриялық функциялар

$$\cos(z;q^2)=\sum_{n=0}^{+\infty}q^{n(n+1)}\frac{(-1)^n z^{2n}}{[2n]_q!},$$

$$\sin(z;q^2)=\sum_{n=0}^{+\infty}q^{n(n+1)}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{[2n+1]_q!}.$$

Функцияның q^2-айырымды дифференциалы төмендегідей анықталады [2]:

$$\partial_q f(z)=\begin{cases}\dfrac{f(q^{-1}z)+f(q^{-1}z)-f(qz)+f(-qz)-2f(-z)}{2(1-q)z}, z\neq 0\\ \lim_{z\to 0}\partial_q f(z), z=0\end{cases}$$

Төмендегідей функциялар класын анықтаймыз [2]:

$$L_q^p(R_{q,+})=\left\{f:\left(\int_0^\infty |f(x)|^p d_q x\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\},\ L_q^\infty(R_{q,+})=\left\{f:\sup_{x\in R_{q,+}}|f(x)|<\infty\right\}.$$

Сондай-ақ, $S_q(R_{q,+})$ деп $R_{q,+}$ анықталған және барлық $m,n\in N$ үшін келесі теңдікті қанағаттандыратын f функциялар жиынын белгілейік:

$$P_{n,m,q}(f)=\sup_{x\in R_{q,+}}\left|x^m D_q^n f(x)\right|<\infty .$$

Ал $S'_q(R_{q,+})$ деп $R_{q,+}$ жиынындағы үлестірілген кеңістік, яғни $S_q(R_{q,+})$ жиынының топологиялық екіжақтылығы.

Айталық $T=R_{q,+}$ болсын. Онда q^2*-Рубин-Фурье түрлендіруі (Rubin-Fourier)* төмендегідей анықталады [2]:

$$\hat{f}(x)=\frac{1}{2\pi_q}\int_0^\infty f(t)\exp(-ixt;q^2)d_q t ,$$

және барлық $t\in R_{q,+}$ үшін кері q^2-Рубин-Фурье түрлендіруі

$$f(t)=\frac{1}{2\pi_q}\int_0^\infty \hat{f}(x)\exp(-ixt;q^2)d_q x ,$$

мұндағы $\dfrac{1}{\pi_q}:=\dfrac{(1+q)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)}$ [2].

$f\in L^2_{R_{q,+}}$ және $g\in L^2_{R_{q,+}}$ функциялары үшін *Фурье үйірткісі* келесі түрде анықталады [2]:

$$\left(f *_q g\right)(x)=\frac{1}{2\pi_q}\int_0^\infty f(x\Theta_q\xi)g(\xi)d_q\xi ,$$

мұндағы $f(x\Theta_q\xi)=\dfrac{1}{2\pi_q}\displaystyle\int_0^\infty \exp(-i\xi y;q^2)\hat{f}(\xi)\exp(i\xi x;q^2)d_q\xi$, $x,y\in R_{q,+}$ Фурье көбейткіш операторы.

Ал Соболев кеңістігі деп $W_q^s(R_{q,+})=\left\{u\in S'_q(R_{q,+}):\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}\hat{u}\in L_q^2(R_{q,+})\right\}$ түрінде анықталған кеңістікті айтамыз. Бұл кеңістіктегі норма [2]:

$$\|u\|^2_{W_q^s(R_{q,+})} = \left(\int_0^\infty \left(1+|\xi|^2\right)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d_q\xi \right)^2 .$$

Сондай-ақ, $0<\tau<\infty$ үшін $C_{rd}^k\left([0,\tau]_T; W_q^s(R_{q,+})\right)$ және $C_{rd}^k\left([0,\tau]_T; L_q^2(R_{q,+})\right)$ кеңістіктеріндегі норма келесідей анықталады [2]:

$$\|u\|_{C_{rd}^k\left([0,\tau]_T; W_q^s(R_{q,+})\right)} := \sum_{n=0}^{s} \max_{t\in[0,\tau]_T} \left\|\partial_q^n u(t,.)\right\|_{W_q^s(R_{q,+})},$$

$$\|u\|_{C_{rd}^k\left([0,\tau]_T; L_q^s(R_{q,+})\right)} := \sum_{n=0}^{s} \max_{t\in[0,\tau]_T} \left\|\partial_q^n u(t,.)\right\|_{L_q^s(R_{q,+})}.$$

Негізгі нәтиже

Айталық, $c\geq 0$ және $0<\tau<\infty$ болсын. Біз келесі жылуөткізгіштік теңдеуге қойылатын Коши есебін қарастырамыз:

$$\begin{cases} u^{\Delta_t}(t,x) - c\partial_{q,x}^2 u(\sigma(t),x) = 0, & (t,x)\in[0,\tau]_T \times R_{q,+}, \\ u(0,x)=\varphi(x), & x\in R_{q,+}. \end{cases} \qquad (1)$$

Мұндағы, $u^{\Delta_t}(t,x)$ - функцияның t бойынша Δ-туындысы.

Теорема. Айталық, $\varphi\in W_q^2(R_{q,+})$ болсын. Онда (1) есебінің жалғыз шешімі бар және ол $C_{rd}^1\left([0,\tau]_T; W_q^2(R_{q,+})\right) \cap C_{rd}^2\left([0,\tau]_T; L_q^2(R_{q,+})\right)$ класына тиісті. Сондай-ақ, бұл шешім келесі формула арқылы анықталады:

$$u(t,x) = \varphi(x) *_q h_{t,0}(x),$$

мұндағы, $h_{t,s}(x) = \dfrac{1}{2\pi_q} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e_{c\xi^2}(t,s)} \exp\left(i\xi x, q^2\right) d_q\xi .$

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Martin Bohner, Allan Peterson. Dynamic Equations on Time Scales An Introduction with Applications. Preliminary final version from May 4, 2001.
2. Ahmed Saoudiy, Ahmed Fitouhiz. Three Applications In q2-Analogue Sobolev Spaces. Received 13, November 2015.