



**EURASIAN
NATIONAL
UNIVERSITY**

БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

Республикалық ғылыми-практикалық конференция

«Математикалық және компьютерлік модельдеудің заманауи мәселелері

Қазақстанның цифрлы индустриясының дамуы жағдайында»

3-5 мамыр 2018 жыл, Астана, Қазақстан

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

Республиканская научно-практическая конференция

«Современные проблемы математического и компьютерного моделирования

в условиях развития цифровой индустрии Казахстана»

3-5 мая 2018 года, Астана, Казахстан

ӘОЖ 004+519+316

КБЖ 22

М 49

В подготовке Сборника принимали участие:

Адамов А.А., Нугманова Г.Н., Сергибаев Р.А., Байдавлетов А.Т.

Математикалық және компьютерлік моделдеудің заманауи мәселелері Қазақстанның цифрлы индустриясының дамуы жағдайында: Республикалық ғылыми-практикалық конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ = Современные проблемы математического и компьютерного моделирования в условиях развития цифровой индустрии Казахстана: СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ Республиканской научно-практической конференции. Қазақша, орысша, ағылшынша. – Астана, 2018, 161 б.

ISBN 978-601-337-014-9

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және ғалымдардың механика, математика, математикалық және компьютерлік моделдеу, математиканы оқыту әдістемесінің өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

В Сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и ученых по актуальным вопросам механики, математики, математического и компьютерного моделирования и методики преподавания математики.

Тексты докладов представлены в авторской редакции

ISBN 978-601-337-014-9

ӘОЖ 004+519+316

КБЖ 22.1

$$(m, X_1). \quad (12)$$

Можно ввести еще одно обобщение выбираемой ключевой последовательности, применяя циклическую последовательность (8), а также диагональную матрицу порядка $N = n$, а именно, возьмем последовательность диагональных матриц

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}, \dots, D_n = \begin{pmatrix} n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & n \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Теперь, возьмем циклическую последовательность матриц, следующим образом:

$$A_1 = \begin{pmatrix} z_1 & \dots & z_n \\ \dots & \dots & \dots \\ z_n & \dots & z_1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} z_2 & \dots & z_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_{n-1} & \dots & z_2 \end{pmatrix}, \dots, A_n = \begin{pmatrix} z_n & \dots & z_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ z_1 & \dots & z_n \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Тогда матрица, которая является ключевой последовательностью, определяется в виде произведения векторов

$$G = (D, A) = \sum_{k=1}^n (D_k \cdot A_k). \quad (15)$$

В этом случае, секретным ключом является пара

$$(D, A): D = (D_1, \dots, D_n), A = (A_1, \dots, A_n). \quad (16)$$

Тогда для открытого текста длины n , $a = (a_1, \dots, a_n)$ потоковое шифрование будет иметь вид:

$$b = G \cdot a^T = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \cdot (a_1, \dots, a_n)^T. \quad (17)$$

Тогда операция расшифрование имеет вид:

$$(a_1, \dots, a_n)^T = G^{-1} \cdot b. \quad (18)$$

Отметим, что в работе приведены только некоторые методы потокового шифрования, причем эти методы комбинируют блочные и потоковые шифрования.

Список использованных источников

1. Кнут Д. Искусство программирования на ЭВМ. Т. 2. Получисленные алгоритмы. М.: Мир, 1977.
2. Баричев С.Г., Гончаров В.В., Серов Р.Е. Основы современной криптографии. М.: «Горячая линия - Телеком», 2001.

РАСЧЕТЫ РИСКОВ В МОДЕЛЯХ СТРАХОВАНИЯ ЖИЗНИ

Беккужина А.Б. , Рахимжанова С.К.

Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

E-mail: a.bekkuzhina@mail.ru, srahimzhanova@mail.ru

Понятие риска является ключевым в теории и практике страхования. Среди множества определений риска, представленных в общей и экономической литературе, можно выделить две основные стороны рассмотрения этого понятия в контексте страхования. Первый уровень рассмотрения связан с общим понятием риска. С этой точки зрения риск рассматривается как вероятность наступления неблагоприятного события. Это риски краж, пожаров, потери здоровья, внезапной смерти, дорожно-транспортных происшествий и т.д. Второй уровень рассмотрения связан с ожидаемыми финансовыми результатами деятельности страховой компании. В этом случае риск представляет собой вероятностное отклонение фактических результатов деятельности фирмы от ожидаемых. При этом возможны три основных результата:

- 1) положительный – достижение желаемых результатов, получение выгоды;
- 2) нулевой – в результате деятельности страховая компания не получила желаемой выгоды, но и не понесла потери;
- 3) отрицательный – в результате деятельности страховая компания понесла материальные потери.

Различают качественную и количественную оценку риска. При качественной оценке определяются возможные виды риска, а также факторы, влияющие на уровень риска при выполнении определенного вида деятельности. При количественной оценке риска определяется вероятность наступления того или иного риска, и размеры страховых премий. Процесс анализа рисков, принятие рисков на страхование (перестрахование) или отклонение, включающий их оценку, классификацию на страхуемые или нестрахуемые, определение сроков, условий и размеров покрытия, расчет размеров премии называется андеррайтингом. Андеррайтинг в личном страховании производится на основе таких критериев как пол, возраст, профессия клиента, образ его жизни, привычки, состояние здоровья, финансовое положение. На основании полученной информации андеррайтер принимает решение об условиях принятия клиента на страхование.

Чтобы рассчитать страховую премию, страховщику нужно как можно точнее оценить уровень риска, т.е. вероятность страхового случая. Для этого потенциальных клиентов нужно разделить на как можно более однородные, с точки зрения вероятности страхового случая, группы. Этот процесс называется классификацией рисков. Классификация при анализе статистических данных ограничена объемом данных – очень подробная классификация приведет к малым группам, для которых статистическая погрешность будет неприемлемо велика. Кроме того, классификация ограничена наличием информации о влияющих на наступление страхового события факторах. По результатам анализа готовится руководство по андеррайтингу, на основе которого проводится классификация потенциальных клиентов в соответствии с уровнем риска, который они представляют для страховой компании.

Основной задачей актуариев страховых компаний являются расчеты рисков в моделях страхования, особую проблему вызывают именно модели страхования жизни, так как на продолжительность жизни человека влияет большое количество факторов. В данной работе сделана попытка создания аналитической функции законов смертности, которые использованы затем для расчетов рисков.

Простейший закон смертности предложил де Муавр (1729 г.), по его предположению время жизни равномерно распределено на интервале $(0; \omega)$: $f(x) = \frac{1}{\omega}$, где ω – предельный возраст. Таким образом, в модели де Муавра:

$$F(x) = \frac{x}{\omega}, \quad s(x) = 1 - \frac{x}{\omega}, \quad \mu_x = \frac{1}{\omega - x} \quad 0 < x < \omega,$$

В модели Гомпертца (1825 г.) интенсивность смертности приближается показательной функцией: $\mu_x = \beta e^{\alpha x}$. Таким образом, в модели Гомпертца:

$$f(x) = \beta \exp \left[\alpha x - \frac{\beta(e^{\alpha x} - 1)}{\alpha} \right],$$

$$s(x) = \exp \left[-\frac{\beta(e^{\alpha x} - 1)}{\alpha} \right]$$

где $\alpha > \beta > 0$ - некие параметры.

Мейкхам (1860 г.) обобщил предыдущую модель, прибавив к интенсивности смертности, предложенной Гомпертцом, постоянную A , характеризующую риски для жизни, связанные с несчастными случаями (мало зависящими от возраста): $\mu_x = A + \beta e^{\alpha}$.

Таким образом, в модели Мейкхама:

$$f(x) = [A + \beta e^{\alpha}] \exp \left[-Ax - \frac{\beta(e^{\alpha x} - 1)}{\alpha} \right],$$

$$s(x) = \exp \left[-Ax - \frac{\beta(e^{\alpha x} - 1)}{\alpha} \right]$$

Вейбулл (1939г.) предложил приблизить интенсивность смертности более просто степенной функцией: $\mu_x = kx^n$. Тогда:

$$f(x) = kx^n \exp \left(-\frac{kx^{n+1}}{n+1} \right),$$

$$s(x) = \exp \left(-\frac{kx^{n+1}}{n+1} \right).$$

Здесь $f(x)$ – функция смертей, $s(x)$ – функция выживания, μ_x – интенсивность смертности. [1]

Используя статистические данные, полученные с сайта stat.gov.kz, с помощью метода наименьших квадратов (МНК), рассчитаем параметры аналитических законов, для того, чтобы использовать их в дальнейших расчетах. Результаты расчетов представлены ниже, в таблице. Рассматриваются отдельно данные о мужчинах и женщинах в возрасте от 0 до 85 лет.

Таблица 1
Значения параметров аналитических законов

Законы		$s(x) = e^{\int_0^x \mu_u du}$	$f(x) = \mu_x s(x)$
Гомпертца	Муж.	$e^{\int_0^x 0,00524e^{0,63705u} du}$	$0,00524e^{0,63705x} e^{\int_0^x 0,00524e^{0,63705u} du}$
	Жен.	$e^{\int_0^x 0,000233e^{0,6068u} du}$	$0,000233e^{0,6068x} e^{\int_0^x 0,000233e^{0,6068u} du}$
Мейкхама	Муж.	$e^{\int_0^x 0,00146 + 0,000634e^{0,6468u} du}$	$0,00146 + 0,000634e^{0,6468x} e^{\int_0^x 0,00146 + 0,000634e^{0,6468u} du}$
	Жен.	$e^{\int_0^x 0,00377 + 0,00045e^{0,6468u} du}$	$0,00377 + 0,00045e^{0,6468x} e^{\int_0^x 0,00377 + 0,00045e^{0,6468u} du}$
Вейбулла	Муж.	$e^{\int_0^x 0,00088u^{1,299897} du}$	$0,00088x^{1,299897} e^{\int_0^x 0,00088u^{1,299897} du}$
	Жен.	$e^{\int_0^x 0,000576u^{1,200818} du}$	$0,000576x^{1,200818} e^{\int_0^x 0,000576u^{1,200818} du}$

График 1

Интенсивность смертности для мужчин



График 2

Интенсивность смертности для женщин



Исследуя модули отклонения фактических данных от найденных с использованием приведенных функций видим, что ни один закон не описывает достаточно хорошо интенсивность смертности на всем возрастном промежутке.

Проведя необходимые исследования, пришли к выводу, что на разных возрастных интервалах интенсивность смертности следует приближать разными законами смертности или одним законом с различными параметрами. Интенсивность смертности для мужчин:

$$\mu_x = \begin{cases} A + Be^{\alpha x}, & x \in (1;3) \\ Be^{\alpha x}, & x \in (4;21) \\ A + Be^{\alpha x}, & x \in (22;61) \\ kx^n, & x \in (62;71) \\ A + Be^{\alpha x}, & x \in (72;82) \\ kx^n, & x \in (83;85) \end{cases}$$

Интенсивность смертности для женщин:

$$\mu_x = \begin{cases} A + Be^{\alpha x}, & x \in (1;3) \\ kx^n, & x \in (4;6) \\ Be^{\alpha x}, & x \in (7;27) \\ A + Be^{\alpha x}, & x \in (28;46) \\ Be^{\alpha x}, & x \in (47;51) \\ kx^n, & x \in (52;58) \\ Be^{\alpha x}, & x \in (59;85) \end{cases}$$

Модели страхования жизни условно делятся на два типа в зависимости, принимается ли в расчет доход от инвестированных премий, если да, то мы говорим о долгосрочном страховании. В противном случае речь идет о краткосрочном страховании жизни. В данном исследовании рассматривается долгосрочное страхование.

Теория долгосрочного страхования в основном опирается на теорию о сложных процентах. В данном исследовании будем предполагать, что интенсивность процентов δ не меняется с течением времени, $i = e^\delta - 1$ будет обозначать эффективную годовую ставку, $v = \frac{1}{1+i}$ – коэффициент дисконтирования.

Долгосрочное страхование можно разделить на две большие группы: непрерывное и дискретное страхование относительно момента выплаты страховой суммы. Если страховая сумма выплачивается в момент смерти застрахованного, то страхование называется непрерывным, если страховая сумма выплачивается в следующий после наступления страхового случая день рождения застрахованного, то страхование называется дискретным. Величина страхового возмещения $\tau(t)$, как правило фиксирована, но в ряде случаев величина возмещения может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от момента ее выплаты. По этой причине введем функцию b_t , которая показывает зависимость страховой выплаты от момента смерти застрахованного - t .

Рассмотрим некоторые виды страхования с фиксированной страховой суммой $b = 1$:

Пожизненное страхование (whole life insurance): $\tau(t) = t, b_t = 1$

n-летнее чисто накопительное страхование (n-year pure endowment insurance):

$$\tau(t) = t \quad b_t = \begin{cases} 1, & t > n \\ 0, & t \leq n \end{cases}$$

n-летнее временное страхование жизни (n-year term life insurance):

$$\tau(t) = t \quad b_t = \begin{cases} 1, & t \leq n \\ 0, & t > n \end{cases}$$

n-летнее смешанное страхование (n-year endowment insurance):

$$\tau(t) = \min(t, n), b_t = 1$$

Пожизненное страхование, отсроченное на m лет (m-year deferred whole life insurance):

$$\tau(t) = t \quad b_t = \begin{cases} 0, & t \leq m \\ 1, & t > m \end{cases}$$

n-летнее временное страхование, отсроченное на m лет:

$$\tau(t) = t \quad b_t = \begin{cases} 0, & t \leq m \\ 1, & m < t \leq m + n \\ 0, & t > m + n \end{cases}$$

Опишем динамику активов компании с течением времени. На промежутке $[\tau_{(k)}, \tau_{(k+1)})$ активы компании возрастают по закону: $u(\tau_{(k)} + t) = u(\tau_{(k)})(1 + i)^t$. А в момент $\tau_{(k+1)}$ активы компании уменьшаются по закону: $u(\tau_{(k+1)} + 0) = u(\tau_{(k+1)} - 0) - b_{(k+1)}$. Если в какой то момент τ_k будет выполнено следующее неравенство- $u(\tau_{(k)} - 0) < b_{(k)}$, то мы говорим о разорении компании. Опишем поведение активов компании, соответствующие не разорению: $\sum_{k=1}^N Z_k \leq u_0$, и разорению: $\sum_{k=1}^N Z_k > u_0$ где $Z_k = b_k v^{\tau_k}$ - величина выплаты по -му договору к моменту времени $t_0 = 0$.

Страховая премия имеет фиксированную структуру, и каждая ее компонента обеспечивает определенную функцию. Большая часть премии уходит на формирования страхового фонда, из которого производятся выплаты по произошедшим страховым случаям. Страховая премия, которую уплачивает страхователь, называется брутто-премия. Ее структура представлена ниже.

Разовая нетто-премия для любого вида непрерывного страхования описываемого $\tau(t)$ и b_t рассчитывается следующей формулой: $A = EZ$, где $Z = b_{T_x} v^{\tau(T_x)} = b_{T_x} e^{-\delta \tau(T_x)}$ - величина страхового возмещения приведенная на момент заключения договора, а x - возраст застрахованного на этот момент. Для конкретных видов страхования модель может быть упрощена и конкретизирована. Рассмотрим расчеты для определенных видов долгосрочного непрерывного страхования.[3] Обозначим через Z_x величину страхового возмещения приведенную на момент заключения договора для застрахованного в возрасте x лет, A_x -разовую нетто-премию для застрахованного в возрасте x лет.[4]

Пожизненное страхование:

$$Z_x = v^{T_x} = e^{-\delta T_x},$$

$$A_x = EZ_x = E e^{-\delta T_x},$$

Как мы видим, A_x является преобразованием Лапласа остаточного времени T_x в кеб. В силу общих теорем теории вероятностей нетто-премию можно выразить через характеристики времени жизни следующим образом:

$$A_x = \int_0^{\infty} v^t f_x(t) dt = \frac{1}{v^x s(x)} \int_x^{\infty} v^t f(t) dt$$

n-летнее чисто накопительное страхование :

$$Z_{x:n} = \begin{cases} 0, & T_x \leq n \\ v^n, & T_x > n \end{cases}, A_{x:n} = v^n \quad {}_t p_x,$$

где

T_x - остаточное время жизни застрахованного в возрасте x лет;

$Z_{x:n}$ - величина страхового возмещения, приведенная на момент заключения договора n-летнего чисто накопительного страхования для застрахованного в возрасте x лет;

$A_{x:n}$ - разовая нетто-премия для n-летнего чисто накопительного страхования, застрахованного в возрасте x лет.[5]

n-летнее страхование жизни:

$$Z_{x:n} = \begin{cases} 0, & T_x > n \\ v^{T_x}, & T_x \leq n \end{cases},$$

$$A_{x:n} = \int_0^n v^t f_x(t) dt = \frac{1}{v^x s(x)} \int_x^n v^t f(t) dt$$

n-летнее смешанное страхование:

$$Z_{x:n} = \begin{cases} v^n, & T_x > n \\ v^{T_x}, & T_x \leq n \end{cases}, \quad A_{x:n} = EZ_{x:n}$$

*Пожизненное страхование, отсроченное на *m* лет:*

$${}_mZ_x = \begin{cases} 0, & T_x \leq m \\ v^{T_x}, & T_x > m \end{cases}$$

$${}_mA_x = \int_m^{\infty} v^t f_x(t) dt = \frac{1}{v^x s(x)} \int_m^{\infty} v^t f(t) dt$$

где

${}_mZ_x$ - величина страхового возмещения, приведенная на момент заключения для пожизненного страхования, отсроченного на *m* лет застрахованного в возрасте *x* лет;

${}_mA_x$ - разовая нетто-премия для пожизненного страхования, отсроченного на *m* лет, застрахованного в возрасте *x* лет.[6]

Рассчитаем разовые нетто-премии при 1-5-10-летнем смешанном страховании мужчин в возрасте *x*=18,20,55 лет с выплатой страховой суммы в конце года смерти. Эффективная годовая процентная ставка *i* = 5%.

Таблица 2
Разовые нетто-премии

	1	5	10
18	0,907091	0,784162	0,616726
40	0,907293	0,784543	0,622791
55	0,907845	0,791422	0,647534

Рассчитаем разовые нетто-премии при 1-5-10-летнем смешанном страховании женщин в возрасте *x*=18,20,55 лет с выплатой страховой суммы в конце года смерти. Эффективная годовая процентная ставка *i* = 5%.[7]

Таблица 3
Разовые нетто-премии

	1	5	10
18	0,907055	0,783778	0,614952
40	0,907121	0,784434	0,617924
55	0,907368	0,786818	0,628103

Список использованных источников

1. Г.И.Фалин. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. 3-е издание М.: АНКЛ 2007.304с.
2. И.И.Елисеева. Практикум по эконометрике М.: Финансы и статистика 2003. 192с
3. И. Елисеева [и др.] ; под ред. И. И. Елисеевой. — М. : Издательство Юрайт, 2015. — 449 с.
4. Н.Бауэрс. Актуарная математика. Под ред.В.К.Малиновского-М.: Янус-К 2001. 656с.
5. Г.И.Фалин, А.И.Фалин Актуарная математика в задачах, 2-е издание М.: Физматлит 2004. 240с.
6. Г.И.Фалин Математический анализ рисков в страховании Москва: Российский юридический издательский дом 1994.
7. Адамчук Н.Г. Экономические основы страхования жизни. Страховое дело № 9–2003, с. 26–38

ВЛИЯНИЕ ВИБРИРУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ДИНАМИКУ КАТКА СО СМЕЩЕННЫМ ЦЕНТРОМ МАСС

Берсүгір М.Ә., Алимжанов М.Д., Айқын Айбек