ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ
ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
ЕВРАЗИЙСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Л.Н. ГУМИЛЕВА
GUMILYOV EURASIAN
NATIONAL UNIVERSITY

ЖАС ҒАЛЫМДАР КЕҢЕСІ

Студенттер мен жас ғалымдардың «Ғылым және білім - 2015» атты X Халықаралық ғылыми конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ X Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2015»

PROCEEDINGS of the X International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2015»

УДК 001:37.0
ББК72+74.04
Ғ 96

Ғ96

«Ғылым және білім – 2015» атты студенттер мен жас ғалымдардың Х Халық. ғыл. конф. = Х Межд. науч. конф. студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2015» = The X International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2015». – Астана: http://www.enu.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie-2015/, 2015. – 7419 стр. қазақша, орысша, ағылшынша.

ISBN 978-9965-31-695-1

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докторанттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 001:37.0
ББК 72+74.04

ISBN 978-9965-31-695-1

УДК 517.92

УСЛОВИЕ СООТНОШЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ БЕЗСОПРЯЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Жақсиликова Маржан
marjan_1291@mail.ru
Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан
Научный руководитель – Мырзатаева К.Р.

Пусть $I=[a,b)$, где $-\infty<a<b\le+\infty$, $1<p<\infty$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

На I рассмотрим полулинейное дифференциальное уравнение второго порядка в виде

$$\left(\rho(t)\Phi\left(y'\right)\right)'+\vartheta(t)\Phi(y)=0 \qquad (1)$$

где $\Phi(s):=|s|^{p-2}\cdot s$ и $\rho(.)$ и $\vartheta(.)$ непрерывные функции на интервале I, причем $\rho(t)>0$, $t\in I$.

Решением уравнения (1) назовем непрерывно дифференцируемую функцию $y:I\to R$, такую, что функция $\rho(t)\left|y'(t)\right|^{p-2}y'(t)$ непрерывно дифференцируема на I и удовлетворяет уравнению (1).

Если любое нетривиальное решение уравнения (1) имеет на I не более одного нуля, тогда уравнение (1) называется уравнением без сопряженных точек.

Через $A^0C_p(a,b)$ обозначим совокупность абсолютно непрерывных и финитных на (a,b) функций f, для которых

$$\int_a^b \rho(t)\left|f'(t)\right|^p dt<\infty$$

Лемма. Уравнение (1) является уравнением без сопряженных точек на интервале (a,b) тогда и только тогда, когда

$$F(f,a,b)=\int_a^b\left[\rho(t)\left|f'(t)\right|^p-\vartheta(t)\left|f(t)\right|^p\right]dt>0$$

для любой ненулевой функции $f\in A^0C_p(a,b)$.

Пусть $\vartheta^+(t)=\max\{0,\vartheta(t)\}$, $\vartheta^-(t)=\max\{0,-\vartheta(t)\}$, $t\in I$ и $\vartheta(t)=\vartheta^+(t)-\vartheta^-(t)$.

$$d^+(t)=\sup\left\{d:\left(\int_t^{t+d}\rho^{1-q}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_t^{t+d}\vartheta^-(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}\le 1,[t,t+d]\subset I\right\},$$

$$d^-(t)=\sup\left\{d:\left(\int_{t-d}^{t}\rho^{1-q}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{t-d}^{t}\vartheta^-(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}\le 1,[t-d,t]\subset I\right\}.$$

Положим

$\Delta^+(t)=\left[t,t+d^+(t)\right]$, $\Delta^-(t)=\left[t-d^-(t),t\right]$, $\Delta(t)=\Delta^+(t)\cup\Delta^-(t)$, где $I=[a,b)$, $\forall t\in(a,b)$.

Далее предполагаем, что для любого $t\in(a,b)$

$$\int_t^b\rho^{1-q}(s)ds=\infty,\ 0<\int_t^b\vartheta^-(s)ds\le\infty \qquad (2)$$

Обозначим через $W_p^1(\rho,\vartheta^+)$, $W_p^0(\rho,\vartheta^-)$ соответственно множество всех локально абсолютно непрерывных на I функций f, для которых конечен функционал

$$\|f\|_{W_p^1}=\left(\int_a^b\left[\rho(t)\left|f^{'}(t)\right|^p+\vartheta^-(t)\left|f(t)\right|^p\right]dt\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (*)$$

и замыкание множества $A^0C_p(a,b)$ по полунорме $(*)$.

Теорема. Пусть $1<p<\infty$ и выполнены условия (2). Если

$$\sup_{a<t<b}\left(\int_{\Delta^+(t)}\vartheta^+(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\Delta^-(t)}\rho^{1-p}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}<\left(\frac{1}{2}\right)^p\min\left\{\left(\frac{1}{p}\right)\cdot\left(\frac{1}{q}\right)^{p-1},\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}\right\},$$ тогда уравнение (1) является уравнением без сопряженных точек на интервале (a,b).

Доказательство. В силу леммы достаточно доказать, что $F(f,a,b)>0$ для любой ненулевой функции $f\in A^0C_p(a,b)$. Так как $A^0C_p(a,b)$ плотно в $\overset{0}{W}{}_p^1(\rho,\vartheta^-)$, то условие леммы выполнено, если

$$\int_a^b\vartheta^+(t)\left|f(t)\right|^p dt<\int_a^b\left[\rho(t)\left|f^{'}(t)\right|^p-\vartheta^-(t)\left|f(t)\right|^p\right]dt \qquad (3)$$

для всех ненулевых $f\in\overset{0}{W}{}_p^1(\rho,\vartheta^-)$.

На основании условия (2) и работы /3/ следует, что

$$\overset{0}{W}{}_p^1(\rho,\vartheta^-)=\left\{f: f\in W_p^1(\rho,\vartheta^-), f(a)=\lim_{t\to a+0}f(t)=0\right\} \qquad (4)$$

Полагая $a=t_0$, определим последовательность точек $t_k=t_{k-1}+d^+(t_{k-1}), k=1,2,\ldots$. Так как $t+d^+(t)\to b$ при $t\to b$, то $t_0<t_1<\ldots<t_k<\ldots$, $t_k\to b$ и $[a,b)=\bigcup_{k=0}^{\infty}\Delta^+(t_k)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Delta^-(t_k)$.

Оценим интегралы справа в (3). Так как в силу (4) $f(a)=0$ для $f\in W_p^1(\rho,\vartheta^-)$, то по обобщеннному неравенству Харди

$$\int_{\Delta^+(t_0)}\vartheta^+(t)\left|f(t)\right|^p dt\le pq^{p-1}\sup_{t\in\Delta^+(t_0)}\left(\int_t^{t_1}\vartheta^+(s)ds\right)\left(\int_{t_0}^t\rho^{1-p}(s)ds\right)^{p-1}\int_{\Delta^+(t_0)}\rho(s)\left|f^{'}(s)\right|^p ds \qquad (5)$$

Учитывая, что $[t,t_1]\subset\Delta^+(t)$ и $[t_0,t]\subset\Delta^-(t)$ для $t\in\Delta^+(t_0)$, из (5) имеем

$$\int_{\Delta^+(t_0)}\vartheta^+(t)\left|f(t)\right|^p dt\le pq^{p-1}\sup_{t\in\Delta^+(t_0)}\left(\int_t^{t_1}\vartheta^+(s)ds\right)\left(\int_{t_0}^t\rho^{1-p}(s)ds\right)^{p-1}\int_{\Delta^+(t_0)}\rho(s)\left|f^{'}(s)\right|^p ds$$

$$\le pq^{p-1}\sup_{a<t<b}\left(\int_{\Delta^+(t_0)}\vartheta^+(s)ds\right)\left(\int_{\Delta^-(t_0)}\rho^{1-p}(s)ds\right)^{p-1}\|f\|_{W_p^1(\Delta^+(t_0))} \qquad (6)$$

Для $k\ge1$ имеем

$$\left(\int_{\Delta^+(t_0)}\vartheta^+(t)\left|f(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_{\Delta^+(t_0)}\vartheta^+(t)\left|f(t)-f(t_k)+f(t_k)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le\left(\int\limits_{\Delta^+(t_0)}\vartheta^+(t)\left|f(t)-f(t_k)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int\limits_{\Delta^+(t_0)}\vartheta^+(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left|f(t_k)\right|. \qquad (7)$$

Применяя опять обобщенное неравенство Харди, получим

$$\left(\int\limits_{\Delta^+(t_0)}\vartheta^+(t)\left|f(t)-f(t_k)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\le p^{\frac{1}{p}}q^{\frac{1}{q}}\sup_{t\in\Delta^+(t_0)}\left(\int\limits_{\Delta^+(t_0)}\vartheta^+(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{\Delta^-(t_0)}\rho^{1-p}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}\int\limits_{\Delta^+(t_0)}\rho(s)\left|f'(s)\right|^p ds$$

$$=p^{\frac{1}{p}}q^{\frac{1}{q}}\sup_{a<t<b}\left(\int\limits_{\Delta^+(t_0)}\vartheta^+(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{\Delta^-(t_0)}\rho^{1-p}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{W_p^1(\Delta^+(t_k))} \qquad (8)$$

Используя формулу Ньютона – Лейбница и неравенство Гельдера, имеем

$$\left|f(t_k)\right|=\left|\int\limits_t^{t_k}f'(s)ds+f(t)\right|\le\int\limits_t^{t_k}\left|f'(s)\right|ds+\left|f(t)\right|=\int\limits_t^{t_k}\left|f'(s)\rho^{\frac{1}{p}}(s)\rho^{-\frac{1}{p}}(s)\right|ds+\left|f(t)\right|\le$$

$$\le\left(\int\limits_{\Delta^-(t_k)}\rho^{1-q}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{\Delta^-(t_k)}\rho(s)\left|f'(s)\right|ds\right)^{\frac{1}{p}}+\left|f(t)\right| \qquad (9)$$

Умножим обе части (9) на $\vartheta^-(t)$ и интегрируем по $t\in\Delta^-(t_k)$, а затем применяем неравенство Гельдера, тогда

$$\left|f(t_k)\right|\int\limits_{\Delta^-(t_k)}\vartheta^-(t)dt\le\left(\int\limits_{\Delta^-(t_k)}\vartheta^-(t)dt\right)\left(\int\limits_{\Delta^-(t_k)}\rho^{1-q}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{\Delta^-(t_k)}\rho(s)\left|f'(s)\right|ds\right)^{\frac{1}{p}}+\int\limits_{\Delta^-(t_k)}\vartheta^-(t)\left|f(t)\right|dt\le$$

$$\le 2^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{\Delta^-(t_k)}\vartheta^-(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{\Delta^-(t_k)}\left[\rho(t)\left|f'(t)\right|+\vartheta^-(t)\left|f(t)\right|^p\right]dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

или

$$\left|f(t_k)\right|\le 2^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{\Delta^-(t_k)}\rho^{1-q}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{W_p^1(\Delta^-(t_k))} \qquad (10)$$

В последнем соотношении учтено, что

$$\left(\int\limits_{\Delta^-(t_k)}\vartheta^-(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{\Delta^-(t_k)}\rho^{1-q}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}=1$$

при $k=1,2,\ldots$

Из $(7),(8),(10)$ имеем

$$\left(\int\limits_{\Delta^+(t_0)}\vartheta^+(s)\left|f(s)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(p^{1-q}q+2\right)^{\frac{1}{q}}\sup_{a<t<b}\left(\int\limits_{\Delta^+(t_0)}\vartheta^+(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{\Delta^-(t_0)}\rho^{1-p}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{W_p^1(\Delta(t_k))} \qquad (11)$$

Из $(6),(11)$ следует

$$\int_a^b \vartheta^+(t)\left|f(t)\right|^p dt \le pq^{p-1}\sup_{a<t<b}\left(\int_{\Delta^+(t_0)}\vartheta^+(s)ds\right)\left(\int_{\Delta^-(t_0)}\rho^{1-p}(s)ds\right)^{p-1}\|f\|_{W_p^1(\Delta^+(t_0))}+$$

$$+\left(p^{1-q}q+2\right)^{p-1}\sup_{a<t<b}\left(\int_{\Delta^+(t_0)}\vartheta^+(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\Delta^-(t_0)}\rho^{1-p}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{W_p^1(\Delta(t_k))}\le$$

$$\sup_{a<t<b}\left(\int_{\Delta^+(t_0)}\vartheta^+(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\Delta^-(t_0)}\rho^{1-p}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(pq^{p-1}\|f\|_{W_p^1(\Delta^+(t_0))}+\left(p^{1-q}q+2\right)^{p-1}\|f\|_{W_p^1(\Delta(t_k))}\right)\le$$

$$\le\max\left\{pq^{p-1},\left(p^{1-q}q+2\right)^{p-1}\right\}\sup_{a<t<b}\left(\int_{\Delta^+(t_0)}\vartheta^+(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\Delta^-(t_0)}\rho^{1-p}(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}\|f\|_p$$

$$\int_a^b \vartheta^+(t)\left|f(t)\right|^p dt \le 2^{p-1}\max\left\{pq^{p-1},2^{p-1}\right\}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^p\min\left\{\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}},\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}\|f\|_{W_p^1(\Delta(t_k))}=$$

$$\frac{1}{2}\max\left\{pq^{p-1},2^{p-1}\right\}\cdot\min\left\{\frac{1}{pq^{p-1}},\frac{1}{2^{p-1}}\right\}\|f\|_p<1\cdot\|f\|^p_{W_p^1(\Delta(t_k))}$$

Отсюда

$$\int_a^b \vartheta^+(s)\left|f(s)\right|^p dt<\|f\|^p_{W_p^1(\Delta(t_k))}\Rightarrow\int_a^b \vartheta^+(s)\left|f(s)\right|^p dt<\int_a^b\left[\rho(s)\left|f'(s)\right|^p+\vartheta^-(s)\left|f(s)\right|^p\right]ds.$$

Теорема доказана.

Список использованных источников

1. Dosly O. Methods of oscillation theory of half – linear second order differential equations. // Czech. Math. J. 50(125)(2000), p. 657 – 671.
2. Ойнаров Р., Мырзатаева К.Р. Неосцилляторность полулинейного дифференциального уравнения второго порядка. // Математический журнал. Алматы. 2007. том 7. №2 (24). С. 72 – 82.

УДК 517.1

ТОЧНЫЙ ПОРЯДОК L_2-ДИСКРЕПАНСА СЕТКИ СМОЛЯКА

Жубанышева Ляйля
Lyailya92@mail.ru
Магистрант 2 курса ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан
Научный руководитель – Н.Ж.Наурызбаев

Сеткой Смоляка [1-2] называют множество ($s=1,2,\ldots;\ q=2,3,\ldots;\ N=N(s,q)\succ\prec 2^q q^{s-1}$)

$$\{\sigma_k\}_{k=1}^N\equiv\bigcup_{t=0}^{q}\bigcup_{\nu_1+\ldots+\nu_s=t}\left\{\left(\frac{2l_1-1}{2^{\nu_1}},\frac{2l_2-1}{2^{\nu_2}},\ldots,\frac{2l_s-1}{2^{\nu_s}}\right):1\le l_j\le 2^{\nu_j-1},\ j=1,2,\ldots,s\right\}. \qquad (1)$$

Количественным показателем свойства равномерности распределения сетки $\xi_1,\ldots,\xi_N$ на единичном кубе $[0,1]^s$ является ее L_2-дискрепанс

$$L_2(\xi_1,\ldots,\xi_N)=\left(\int_{[0,1]^s}\left(\frac{A_{(x_1,1]\times\ldots\times(x_s,1]}}{N}-(1-x_1)\cdot\ldots\cdot(1-x_s)\right)^2\right)^{1/2}=\left(\int_{[0,1]^s}\left(\frac{1}{N}\sum_{k-1}^{N}\chi_{(x_1,1]\times\ldots\times(x_s,1]}(\xi_k)-\int_{[0,1]^s}\chi_{(x_1,1]\times\ldots\times(x_s,1]}(t)dt\right)^2\right)^{1/2},$$

(2)