Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

СОВЕТ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ
Евразийский национальный университет им.Л.Н.Гумилева

Студенттер мен жас ғалымдардың «ҒЫЛЫМ ЖӘНЕ БІЛІМ - 2014» атты IX халықаралық ғылыми конференциясы

IX Международная научная конференция студентов и молодых ученых «НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ - 2014»

The IX International Scientific Conference for students and young scholars «SCIENCE AND EDUCATION-2014»

2014 жыл 11 сәуір
11 апреля 2014 года
April 11, 2014

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Л.Н. ГУМИЛЕВ АТЫНДАҒЫ ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Студенттер мен жас ғалымдардың «Ғылым және білім - 2014» атты IX Халықаралық ғылыми конференциясының БАЯНДАМАЛАР ЖИНАҒЫ

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ IX Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2014»

PROCEEDINGS of the IX International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2014»

2014 жыл 11 сәуір

Астана

УДК 001(063)
ББК 72
Ғ 96

Ғ 96
«Ғылым және білім – 2014» атты студенттер мен жас ғалымдардың IX Халықаралық ғылыми конференциясы = IX Международная научная конференция студентов и молодых ученых «Наука и образование - 2014» = The IX International Scientific Conference for students and young scholars «Science and education - 2014». – Астана: http://www.enu.kz/ru/nauka/nauka-i-obrazovanie/, 2014. – 5831 стр. (қазақша, орысша, ағылшынша).

ISBN 978-9965-31-610-4

Жинаққа студенттердің, магистранттардың, докоранттардың және жас ғалымдардың жаратылыстану-техникалық және гуманитарлық ғылымдардың өзекті мәселелері бойынша баяндамалары енгізілген.

The proceedings are the papers of students, undergraduates, doctoral students and young researchers on topical issues of natural and technical sciences and humanities.

В сборник вошли доклады студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых по актуальным вопросам естественно-технических и гуманитарных наук.

УДК 001(063)
ББК 72

ISBN 978-9965-31-610-4

$$h(n)=\begin{cases}\dfrac{2\sin^2(\pi n/2)}{\pi n}, & n\neq 0\\ 0, & n=0\end{cases} \quad (6)$$

Равенства (5) и (6) описывают идеальный цифровой преобразователь Гильберта.

Поскольку последовательность $\hat{x}(n)$ можно получить, пропуская $x(n)$ через фильтр, то эти две последовательности связаны соотношением типа свертки:

$$\hat{x}(n)=\frac{2}{\pi}\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq n}}^{\infty}x(n-m)\frac{\sin^2(\pi m/2)}{m}. \quad (7)$$

Аналогичным образом из $\hat{x}(n)$ с помощью фильтра, импульсная характеристика которого описывается выражением (6) с обратным знаком, можно получить $x(n)$. Следовательно,

$$x(n)=-\frac{2}{\pi}\sum_{\substack{m=-\infty\\ m\neq n}}^{\infty}\hat{x}(n-m)\frac{\sin^2(\pi m/2)}{m}. \quad (8)$$

Равенства (7) и (8) представляют собой пару преобразований Гильберта для действительных сигналов $x(n),\ \hat{x}(n)$.

Список использованных источников

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. –Москва: Издательство «Мир», 1978. – 849 с.
2. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. – Москва: Техносфера, 2006. – 857 с.

УДК 517.51

ОПЕРАТОР СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА И БЕСОВА

Мырзакул Акбота Ратбайкызы

akbota_myrzakul@mail.ru

магистрант 2 курса механико-математического факультета

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

Научный руководитель – Н.Т. Тлеуханова

В работе рассматривается оператор свертки

$$(Af)(y)=(K*f)(y)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y)f(x)dx. \quad (1)$$

Есть множество работ связанных с изучением ограниченности оператора свертки в различных пространствах. Одними из первых результатов в этой области являются неравенство Юнга

$$\|K*f\|_{L_p}\leq\|K\|_{L_r}\|f\|_{L_q}, \quad (2)$$

где $1+\frac{1}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$ и неравенство Юнга-О'Нейла [1]

$$\|K*f\|_{L_p}\leq\|K\|_{L_{r\infty}}\|f\|_{L_q}, \quad (3)$$

где

$$\|f\|_{L_p}=\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

– норма функции f в пространстве Лебега $L_p(\mathbb{R})$.

В дальнейшем нам потребуется следующее понятие. Пусть I – интервал с мерой $|I| = d$. Тогда $T_I = \{I + kd\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – разбиение $\mathbb{R}$, т.е. $\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(I + kd)$. Определим две системы множеств $\mathfrak{L}(I) \subset \mathfrak{U}(I)$:

$$\mathfrak{L}(I) = \left\{ e : e = \bigcup_{k=1}^{m}([a,b] + kd), [a,b] \subseteq I, m \in \mathbb{N} \right\}$$

и

$$\mathfrak{U}(I) = \left\{ e : e = \bigcup_{k=1}^{m}\omega_k, m \in \mathbb{N} \right\},$$

где $\{\omega_k\}_{k=1}^{m}$ – произвольное семейство компактов с одинаковыми мерами $|\omega_k| \le d$, такие, что ω_k принадлежат различным интервалам в T_I. В работе [2] Е. Нурсултанов, С. Тихонов и Н. Тлеуханова получили следующую теорему

Теорема А. *Пусть* $1 < p < q < \infty$. *Тогда для оператора свертки* $Af = K * f$ *имеют место неравенства*

$$\begin{aligned} C_1 \sup_I \sup_{e\in\mathfrak{L}(I)} \frac{1}{|e|^{1/p-1/q}} \left| \int_e K(x)dx \right| &\le \|A\|_{L_p \to L_q} \\ &\le C_2 \inf_I \sup_{e\in\mathfrak{U}(I)} \frac{1}{|e|^{1/p-1/q}} \left| \int_e K(x)dx \right|, \end{aligned} \tag{4}$$

где константы C_1, C_2 *зависят только от* p *и* q.

В данной работе изучается ограниченность оператора свертки в пространствах Соболева и Бесова [3]. Приведем определения этих пространств.

Определение 1. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. *Пространством Соболева* $W_p^k(\mathbb{R})$ *называется пространство функций из* $L_p(\mathbb{R})$, *для которых обобщенная производная* $f^{(k)} \in L_p(\mathbb{R})$. *Норма в этом пространстве определяется следующим образом*

$$\|f\|_{W_p^k} := \|f\|_{L_p} + \|f^{(k)}\|_{L_p}.$$

Определение 2. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$, $s > 0$. *Тогда пространством Бесова* $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ *называется множество функций, для которых конечна величина*

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} := \|f\|_{L_p} + \left(\int_{\mathbb{R}} |t|^{-1-sq} \|\Delta_h^k f\|_{L_p}^q du \right)^{1/q}, \quad k > s,$$

где

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k+j} C_k^j f(x + jh)$$

– разность порядка k функции f в точке $x \in \mathbb{R}$ с шагом $h \in \mathbb{R}$ и норма $\|\Delta_h^k f\|_p$ берется по x.

Приведем связь между пространствами Соболева и Бесова из теории интерполяции функциональных пространств. Пусть (A_0, A_1) – совместимая пара банаховых пространств [4] и

$$K(t, a; A_0, A_1) = \inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}), \quad a \in A_0 + A_1$$

– функционал Петре.

При $0 < q < \infty$, $0 < \theta < 1$ положим

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} = \left\{ a \in A_0 + A_1 : \|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t,a))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

а при $q = \infty$

$$(A_0, A_1)_{\theta,\infty} = \left\{ a \in A_0 + A_1 : \|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,\infty}} = \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta} K(t,a) < \infty \right\}.$$

Теорема В. *Пусть* $1 \le p, q \le \infty$, $0 < \theta < 1$, $s_0 \ne s_1$. *Тогда верно равенство*

$$(W_p^{s_0}, W_p^{s_1})_{\theta,q} = B_{p,q}^{s^*},$$

где $s^* = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $m, k \in \mathbb{N}$, $m > k$. *Пусть также ядро* K *удовлетворяет следующим условиям:*

$$\inf_I \sup_{e \in \mathrm{U}(I)} \frac{1}{|e|^{1/p-1/q}} \left| \int_e K(x)dx \right| < \infty, \tag{5}$$

$$\inf_I \sup_{e \in \mathrm{U}(I)} \frac{1}{|e|^{1/p-1/q}} \left| \int_e K^{(m-k)}(x)dx \right| < \infty. \tag{6}$$

Тогда оператор свертки (1) является ограниченным

$$A : W_p^k \to W_q^m.$$

Как следствие из теоремы 1 и теоремы В получим

Теорема 2. *Пусть* $1 < p_1 < p_2 < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $r > s$. *Пусть также ядро* K *удовлетворяет следующим условиям:*

$$\inf_I \sup_{e \in \mathrm{U}(I)} \frac{1}{|e|^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}} \left| \int_e K(x)dx \right| < \infty, \tag{7}$$

$$\inf_I \sup_{e \in \mathrm{U}(I)} \frac{1}{|e|^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}} \left| \int_e K^{(m-k)}(x)dx \right| < \infty. \tag{8}$$

Тогда оператор свертки (1) является ограниченным

$$A : B_{p_1,q}^s \to B_{p_2,q}^r.$$

Список использованных источников

1. O'Neil R. Convolutions operators and $L(p,q)$ spaces // Duke Math. J. – 1963. – 30. – P. 129-142.
2. Nursultanov E., Tikhonov S., Tleukhanova N. Norm inequalities for convolution operators // C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. – 347 (2009). – P. 1385-1388.
3. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. – Москва: Наука, 1975.
4. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. – М.: Мир, 1980.

ӘОЖ 373.13:51

АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫ АЛГЕБРА ЕСЕПТЕРІН ШЕШУГЕ ҚОЛДАНУ

Нарбекова Гулдана Маратовна
gggguldana@mail.ru