

## РЕШЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В РАМКАХ ГРАВИТАЦИИ ГАУССА-БОННЕ

**Рахатов Даурен Жанатович**

[godaturen@gmail.ru](mailto:godaturen@gmail.ru)

Магистрант 2-го года обучения специальности 7М05304 – Физика,  
кафедра общей и теоретической физики,  
ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан  
Научный руководитель – Цыба П.Ю.

Одной из актуальных моделей гравитации в современной космологии является  $f(G)$ -гравитация, активно исследуемая последние 10 лет [1-4]. В данном случае,  $G$  – инвариант Гаусса-Бонне [5], который вычисляется по формуле  $G = R_{iklm}R^{iklm} - 4R_{ik}R^{ik} + R^2$ , где  $R_{iklm}$  – ковариантный вид тензора Римана,  $R_{ik}$  – ковариантный вид тензора Риччи,  $R$  – скалярная кривизна пространства [6]. В данной работе рассматриваются как ранние этапы развития Вселенной, так и более поздние. Космологическая инфляция будет рассматриваться через параметры медленного скатывания  $\varepsilon$  и  $\eta$ , получаемые из уравнений движения скалярного поля [7]. Поздние этапы описываются космографическими параметрами [3]. В зависимости от значения параметра замедления делается вывод о том, каким образом происходит расширение Вселенной. Так как для ускоренного расширения Вселенной необходимо отрицательное давление, существуют условия, ограничивающие значения давления, называемые энергетическими условиями NEC, WEC, SEC и DEC [8]. Исследование происходит в рамках плоской, однородной и изотропной Вселенной, поэтому, энергетические условия можно свести к значениям параметра замедления.

Действие исследуемой модели гравитации Гаусса-Бонне с электромагнитным и скалярным полем, задается как

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ f(G) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V(\varphi) \right], \quad (1)$$

где  $g$  – метрический тензор;  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  – тензоры электромагнитного поля;  $f(G)$  – некоторая функция, зависящая от  $G$ ;  $V(\varphi)$  – потенциал скалярного поля.

Для данного исследования выбрана четырехмерная метрика Фридмана-Робертсона-Уокера  $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ . Сигнатура используемой метрики, в рамках исследуемой модели, задана как  $(-, +, +, +)$ . Все вычисления проводятся с использованием естественной системы единиц  $8\pi G = \hbar = c = 1$  [9].

В исследовании будет применяться инвариант электромагнитного поля, который имеет вид  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , где  $A$  – векторный потенциал, заданный как  $A_\mu = (\Phi, A_1, A_2, A_3)$  [10]. Для использования тензора напряженности электромагнитного поля в данном исследовании применяется анзац вида

$$A_\mu = (0, A_1(t), A_2(t), A_3(t)). \quad (2)$$

Учитывая анзац (2), инвариант электромагнитного поля будет иметь значение

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = (F_{\mu\nu})^2 g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} = -\frac{2}{a^2} [(\dot{A}_1)^2 + (\dot{A}_2)^2 + (\dot{A}_3)^2]. \quad (3)$$

В данном исследовании будет применена калибровка для векторного потенциала электромагнитного поля вида  $A_1, A_2, A_3 = \varphi$ . Использование уравнения Эйлера-Пуассона позволяет получить уравнения движения. Аналогичные уравнения получаются при использовании метода множителей Лагранжа и при вариации действия.

$$3H^2 + 2\dot{H} = -p, \quad (5)$$

$$p = \frac{1}{8H\dot{f}_G} \left[ -\frac{1}{6a^2} [(\dot{A}_1)^2 + (\dot{A}_2)^2 + (\dot{A}_3)^2] + f - Gf_G + 8H^2(\ddot{f}_G - \dot{f}_G) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \right],$$

$$3H^2 = \rho, \quad (6)$$

$$\rho = \frac{1}{8H\dot{f}_G} \left[ -\frac{1}{2a^2} [(\dot{A}_1)^2 + (\dot{A}_2)^2 + (\dot{A}_3)^2] + (Gf_G - f) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \right],$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (7)$$

Использование уравнения Эйлера-Лагранжа также позволяет найти уравнение Клейна-Гордона и уравнение Максвелла [11]

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V_\varphi = 0, \quad (8)$$

$$H\dot{A}_\mu + \ddot{A}_\mu = 0, \quad \mu = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Для получения решений вводится масштабный фактор на основе гиперболического синуса  $a(t) = a_0 \sinh^{\frac{2}{3}}(\alpha t)$ , где  $a_0, \alpha$  – произвольные постоянные. Функция, зависящая от  $G$  задается как  $f(G) = \gamma G^n$ , где  $\gamma, n$  – произвольные постоянные. Из уравнения Максвелла с учетом калибровки векторного потенциала электромагнитного поля получено значение функции скалярного поля

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cosh(\alpha t) \cdot F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}; \frac{7}{6}; -\sinh^2(\alpha t)\right) \operatorname{sech}(\alpha t) \sinh^{\frac{1}{3}}(\alpha t) + \varphi_1, \quad (10)$$

где  $\varphi_0, \varphi_1$  – произвольные постоянные;  $F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}; \frac{7}{6}; -\sinh^2(\alpha t)\right)$  – гипергеометрическая функция [12].

Учитывая полученное значение функции  $\varphi(t)$ , из уравнения Клейна-Гордона (8) вычисляется значение потенциала скалярного поля.

$$V = -\frac{8\alpha \coth(\alpha t) \varphi \varphi_0}{3 \sinh^{\frac{2}{3}}(\alpha t)} + V_0, \quad (11)$$

где  $V_0$  – константа интегрирования.

Решения уравнений Фридмана имеют следующий вид

$$\frac{4\alpha^2}{3} = -p, \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
-p = & \frac{4\alpha^2(3 - \cosh^2(\alpha t))}{3(2\cosh^4(\alpha t) - 5\cosh^2(\alpha t) + 3)} + \frac{2\alpha^2(9\cosh^2(\alpha t) - 2\cosh^2(\alpha t) + 3)}{9\cosh^4(\alpha t) - 12\cosh^2(\alpha t) + 9} + \\
& + \frac{2\alpha^2\cosh^2(\alpha t)(4\cosh^4(\alpha t) - 12\cosh^2(\alpha t) + 9)}{9(\cosh^4(\alpha t) - 4\cosh^2(\alpha t) + 3)} + \\
& + \frac{2 \cdot 27^n \coth^{4-2n}(\alpha t)(2\cosh^2(\alpha t) - 3)^{2-n}}{64^n \alpha^{4n-2} \sinh(\alpha t) \gamma n(n-1)} \left( \frac{\varphi_0^2}{2\sinh^{\frac{4}{3}}(\alpha t)} - \frac{\varphi_0^2 \alpha_0}{2} + \frac{8\alpha \cdot \coth(\alpha t) \varphi_0 \varphi}{3\sinh^{\frac{2}{3}}(\alpha t)} - V_0 \right), \\
& \frac{4\alpha^2}{3} \coth^2(\alpha t) = \rho, \tag{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho = & \frac{2\alpha^2\cosh^2(\alpha t)(4\cosh^4(\alpha t) - 12\cosh^2(\alpha t) + 9)}{9(\cosh^4(\alpha t) - 4\cosh^2(\alpha t) + 3)} + \\
& + \frac{2 \cdot 27^n \coth^{4-2n}(\alpha t)(2\cosh^2(\alpha t) - 3)^{2-n}}{64^n \alpha^{4n-2} \sinh(\alpha t) \gamma n(n-1)} \left( \frac{\varphi_0^2}{2\sinh^{\frac{4}{3}}(\alpha t)} - \frac{3\varphi_0^2 \alpha_0}{2} - \frac{8\alpha \cdot \coth(\alpha t) \varphi_0 \varphi}{3\sinh^{\frac{2}{3}}(\alpha t)} + V_0 \right).
\end{aligned}$$

В данном решении параметр уравнения состояния имеет вид  $\omega = -\tanh(\alpha t)$ , который стремится к значению  $\omega(t) = -1$  при увеличении параметра  $\alpha$ , что характеризует среду с отрицательной гравитацией. В рамках исследования, для описания модели в инфляционной стадии будут использоваться параметры медленного скатывания [13]. Данные параметры задаются как

$$\varepsilon = \left( \frac{V_\varphi}{V} \right)^2, \quad \eta = \frac{V_{\varphi\varphi}}{V}. \tag{14}$$

Для возникновения инфляции, параметры медленного скатывания, должны отвечать условиям  $\varepsilon(t) \ll 1$  и  $\eta(t) \ll 1$ . Выход из инфляции происходит тогда, когда параметры медленного скатывания превышают значения  $\varepsilon(t) = 1$  и  $\eta(t) = 1$ . Параметры медленного скатывания показаны на рисунке 1 и рисунке 2.

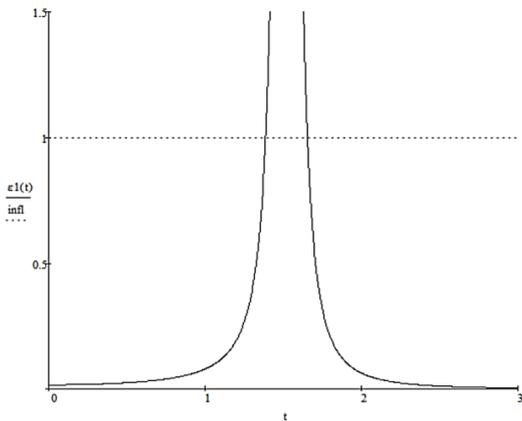


Рисунок 1. Зависимость параметра  $\varepsilon$  от космологического времени  $t$ .

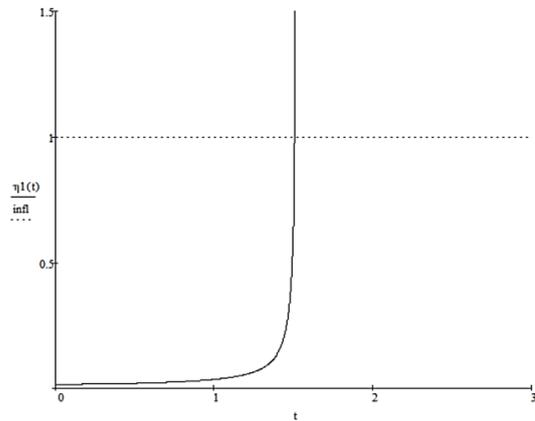


Рисунок 2. Зависимость параметра  $\eta$  от космологического времени  $t$ .

На графиках явно видно, что обе модели соответствуют условиям возникновения инфляции и выхода из нее. Анализ моделей в рамках поздних этапов эволюции Вселенной

будет производиться на основе космографических параметров и энергетических условий NEC, WEC, DEC и SEC. Космографические параметры исследуемой модели имеют следующие значения

$$q(t) = \frac{3}{2\cosh^2(at)} - 1, \quad (15)$$

$$j(t) = 1, \quad (16)$$

$$s(t) = 1 - \frac{9}{2\cosh^2(at)}, \quad (17)$$

$$l(t) = \frac{\cosh^4(at) + 3\cosh^3(at) + 13.5}{\cosh^4(at)}. \quad (18)$$

При значениях  $q(t) > 0$  расширение медленное, при  $q(t) < 0$  расширение ускоренное. При этом параметр  $j(t)$  должен принимать положительные значения. Из (16-18) видно, что значения космографических параметров описывают ускоренно расширяющуюся Вселенную. Вторым параметром анализа модели в рамках поздней Вселенной является ряд энергетических условий. В рамках исследуемой модели условие WEC выполняется, так как модель построена на основе плоской, однородной и изотропной Вселенной, а также используются вещественные масштабные факторы. По этой же причине энергетические условия можно свести к значениям параметра замедления

$$NEC: q \geq -1, \quad (19)$$

$$SEC: q \geq 0, \quad (20)$$

$$DEC: q \leq 2. \quad (21)$$

Для проверки соответствия параметра замедления  $q(t)$  энергетическим условиям (19-21) построен график зависимости параметра замедления от космологического времени.

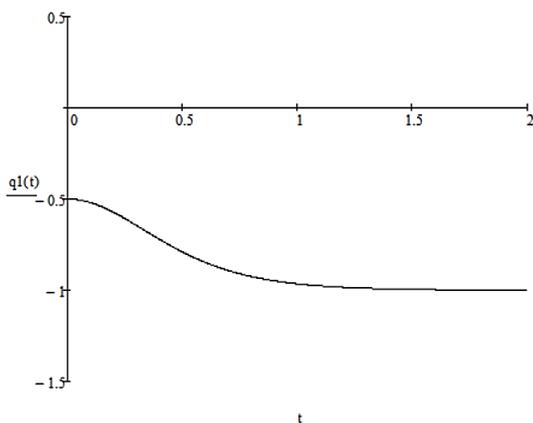


Рисунок 3. Зависимость параметра  $q(t)$  от космологического времени.

На рисунке 3 явно видно, что параметр замедления соответствует только условиям NEC, WEC, DEC. Энергетическое условие SEC не соблюдается, так как именно это условие ограничивает компоненты Вселенной с большим отрицательным давлением, в то время, как это является необходимым условием для ускоренного расширения Вселенной.

Исследована модель гравитации Гаусса-Бонне, содержащая в себе компоненты электромагнитного и скалярного поля. Для заданного действия были найдены уравнения движения, к которым были найдены решения. Параметр уравнения состояния модели  $\omega = -\tanh(at)$ , который с увеличением параметра  $a$  стремится к значению  $\omega = -1$ , что

описывает случай среды с отрицательной гравитацией или космологический вакуум. Исследование инфляции через параметры медленного скатывания показало, что модель удовлетворяет условиям возникновения инфляции и выхода из нее. Исследование поздней Вселенной с помощью космографических параметров показало, что параметры замедления и рывка описывают ускоренно расширяющуюся Вселенную. Исследование энергетических условий показало, что NEC, WEC и DEC соблюдаются, но не соблюдается SEC. Несоблюдение данного энергетического условия ожидаемо, так как компоненты с отрицательным давлением необходимы для расширения Вселенной. Следовательно, данное условие соблюдаться не должно.

*Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан AP08052034.*

#### Список использованных источников

1. Athanasios Bakopoulos Black holes and wormholes in the Einstein-scalar-Gauss-Bonnet generalized theories of gravity. [Электр. ресурс]: view pdf. – Режим доступа: <https://arxiv.org/pdf/2010.13189v1> [gr-qc] 25 Oct 2020
2. Francesco Bajardi and Salvatore Capozziello  $f(G)$  Noether cosmology. [Электр. ресурс]: view pdf. – Режим доступа: <http://arxiv.org/pdf/2005.08313v2> [gr-qc] 16 Jul 2020
3. Santosh V. Lohakare, S.K. Tripathy, B. Mishra Cosmological model with time varying deceleration parameter in  $F(R, G)$  gravity. [Электр. ресурс]: view pdf. – Режим доступа: <http://arxiv.org/pdf/2112.03686v1> [gr-qc] 6 Dec 2021
4. Nicolas R. Bertini, Neven Bilić and Davi C. Rodrigues Primordial perturbations and inflation in a holography inspired Gauss-Bonnet Cosmology. [Электр. ресурс]: view pdf. – Режим доступа: <http://arxiv.org/pdf/2012.05154v2> [gr-qc] 22 Dec 2020
5. S.D. Odintsov, V.K. Oikonomou and S. Banerjee Dynamics of Inflation and Dark Energy from  $F(R, G)$  Gravity. [Электр. ресурс]: view pdf. – Режим доступа: <http://arxiv.org/pdf/1807.00335v1>
6. G. V. Kraniotis Curvature Invariants for accelerating Kerr-Newman black holes in (anti)-de Sitter spacetime. [Электр. ресурс]: view pdf. – Режим доступа: <http://arxiv.org/pdf/2112.01235v1>
7. Фомин, И. В. Методы построения и верификации моделей ранней Вселенной со скалярным полем: специальность 01.04.02 «Теоретическая физика»: диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук / Фомин Игорь Владимирович ; Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана. — Москва, 2019. — 223 с.
8. Farias I. S., Moraes P. H.R.S. Cosmography of the  $f(R,T)$  gravity theory [Электр. ресурс]: view pdf. – Режим доступа: <https://arxiv.org/pdf/2108.09332.pdf>
9. A. A. Sheykin, S. N. Manida Universal constants and natural systems of units in a spacetime of arbitrary dimension. [Электр. ресурс]: view pdf. – Режим доступа: <http://arxiv.org/pdf/2005.08196v3> [gr-qc] 1 Oct 2020
10. Zwiebach A First Course in String Theory. doi:10.1017/CBO9780511841682.005. — Cambridge : Cambridge University Press., 2004. — 545 с.
11. Лекции по квантовой теории поля, М.В.Садовский, 2002
12. "Hypergeometric function", Encyclopedia of Mathematics, EMS Press, 2001 [1994]
13. Andrew, R. L. Cosmological Inflation and Large-Scale Structure / R. L. Andrew, H. L. David. : Cambridge University Press, 2012. — 400 с. ISBN:9781139175180