

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ЭФФЕКТОВ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ. ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Бегимова Әсел Жәнісбекқызы

begimovaasel@gmail.com

Докторант ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Научные руководители – Бурамбаева Н.А., Сиренко Ю.К.

Что из себя представляет математическое моделирование и вычислительный эксперимент в электродинамике? Базисом для всех математических манипуляций касательно электромагнитных волн являются уравнения Максвелла, из которых вытекают краевые (частотная область) [1-16] и начально-краевые (временная область) [17-24] задачи. Решая корректно такого рода задачи мы и получаем математическую модель для определенных электродинамических структур.

В моделировании задач электродинамики есть ряд трудностей связанные с ограничением пространства счета, то есть все задачи тем или иным образом касающиеся электромагнитных волн относятся к открытым задачам, задачам где электромагнитная волна зародилась бесконечно давно и может протекать бесконечно долго. Решать задачу с бесконечным монохроматическим сигналом можно в частотной области, но учитывая современные потребности перед такого рода задачами ставятся более жесткие ограничения, а использование метода решения задач электродинамики во временной области эффективнее и точнее в этом плане и обладает рядом преимуществ таких что: свободны от ряда идеализации, присущих частотной области; универсальность –геометрические и материальные параметры объекта ограничены минимально; сравнительно короткое время считывания исходных данных и реализации счета на современных компьютерах, не требуют обращения каких либо операторов; легкое преобразование всех полученных результатов в частотную область счета. Решая задачу электродинамики во временной области, открытую задачу корректно заменяем эквивалентной начально краевой закрытой задачей, то есть используем математические средства определенной строгости [25,26] для исключительных ситуаций, таких что позволяют нам получить результаты с высокой точностью и надежностью.

Вся математика в радиофизике сводится к уравнениям Максвелла. В нашем же случае оно дополнено материальным уравнением и уравнением закона сохранения заряда. Все уравнения предназначены для локально неоднородных, изотропных, немагнитных и недисперсных сред распространения волн. Эти уравнения можно записать в виде:

$$\eta_0 \operatorname{rot} H = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E + J, \quad \operatorname{rot} E = -\eta_0 \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} H = 0, \quad \operatorname{div}(\varepsilon E) = \rho, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} J + \operatorname{div}(\sigma E) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

Здесь, $E \equiv E(g, t) = \{E_x, E_y, E_z\}$ - вектор напряженности электрического поля; $H \equiv H(g, t) = \{H_x, H_y, H_z\}$ - вектор напряженности магнитного поля; $\eta_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}$ - импеданс свободного пространства (волновое сопротивление вакуума), ε_0 -электрическая постоянная вакуума, μ_0 -магнитная постоянная вакуума; $J = \eta_0 j$, где $j(g, t)$ - вектор плотности сторонних токов; $\sigma = \eta_0 \sigma_0$, $\sigma_0 \equiv \sigma_0(g) \geq 0$ - удельная проводимость локально неоднородной среды распространения волн; $\varepsilon \equiv \varepsilon(g) \geq 1$ - относительная диэлектрическая проницаемость локально неоднородной среды распространения волн; $\rho = \rho_0/\varepsilon_0$, $\rho_0(t)$ - объемная плотность индуцированных и сторонних электрических зарядов; $g = \{x, y, z\}$ (

$g = \{\rho, \phi, z\}$ или $g = \{r, \nu, \phi\}$ - точка пространства R^3 , x, y, z - прямоугольные декартовы координаты, ρ, ϕ, z и r, ν, ϕ - цилиндрические и сферические координаты.

В вышеуказанных уравнениях дивергентные уравнения системы (1)-(3) являются условиями налагаемыми на начальные данные задачи, а начальные данные для E и ρ должны быть согласованы [27]. Уравнение (3) согласовывает источники (сторонние токи и сторонние электрические заряды), порождающие электромагнитное поле, во все моменты времени наблюдения t .

При правильной постановке задач шесть компонент векторов напряженности поля можно описать роторными уравнениями (1), которые в прямоугольных декартовых координатах записываются в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \eta_0^{-1} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_0 E_x + j_x, & \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\eta_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon \eta_0^{-1} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_0 E_y + j_y, & \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\eta_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon \eta_0^{-1} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma_0 E_z + j_z, & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\eta_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}. \end{cases}$$

Трехмерные роторные уравнения с шестью неизвестными компонентами можно упростить таким образом что поле однородно относительно оси x в координатной системе $g = \{x, y, z\}$, где $\varepsilon(g) = const$ $\sigma(g) = const$, то есть $\partial/\partial x \equiv 0$.

Таким образом, мы получаем две двухмерные задачи для телеграфных уравнений, которые взаимодополняют друг друга:

$$\left[-\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] E_x(g, t) = F(g, t) = \frac{\partial J_x}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\eta_0^{-1} \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = \eta_0^{-1} \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (5)$$

и

$$\left[-\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] H_x(g, t) = F(g, t) = \frac{\partial j_y}{\partial z} - \frac{\partial j_z}{\partial y}, \quad (6)$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y + J_y = \eta_0 \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z + J_z = -\eta_0 \frac{\partial H_x}{\partial y} = \eta_0^{-1} \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (7)$$

Здесь решая уравнения (4) и (5) относительно $E_x(g, t)$ мы находим решение для E поляризованного поля, где $E_y = E_z = H_x = j_y = j_z = 0$. Соответственно решая уравнения (6) и (7) относительно неизвестной $H_x(g, t)$ находим решение для H поляризованного поля. Уравнение (1) также, можно упростить исключая один неизвестный вектор, либо используя функции Борнниса. В первом случае уравнение (1) примет вид

$$\begin{cases} \left[\Delta - grad \operatorname{div} - \varepsilon(g) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma(g) \frac{\partial}{\partial t} \right] E(g, t) = \frac{\partial}{\partial t} J(g, t) \equiv F(g, t), & g \in R^3. \\ \frac{\partial}{\partial t} H(g, t) = -\frac{1}{\eta_0} \operatorname{rot} E(g, t). \end{cases} \quad (8)$$

Любая конкретно поставленная модельная задача во время исследования определяется уравнением, на которой мы уже выше остановились, областью анализа, где меняются координаты неизвестных векторов напряженности, начальными и краевыми (граничными) условиями.

Область анализа Q в трехмерных векторных задачах это все трехмерное пространство за исключением пространства ограниченную поверхностями S – границами областей $\text{int } S$, занятым идеальным металлом: $Q = R^3 \setminus \text{int } S$.

На поверхности S идеальных проводников тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля обращается в ноль во все моменты времени наблюдения t :

$$E_{tg}(g, t)|_{g \in S} = 0, \quad t \geq 0 \quad (9)$$

Второе граничное условие вытекает из того что в уравнениях Максвелла не предусмотрен момент, когда материальные параметры среды $\varepsilon(g)$ и $\sigma(g)$ терпят разрыв на поверхности $S^{\varepsilon, \sigma}$ или меняются скачкообразно, то есть для корректного решения задачи тангенциальные составляющие векторов напряженности электрического и магнитного полей $E_{tg}(g, t)$ и $H_{tg}(g, t)$ должны быть непрерывны.

Начальные (в момент времени $t = 0$) условия задают исходное состояние системы, изменяющейся затем (в моменты времени $t > 0$) по правилам, определяемым дифференциальными уравнениями и краевыми условиями. Задание начальных состояний $E(g, 0)$ и $H(g, 0)$ в системе (1) эквивалентно заданию $E(g, 0)$ и $[\partial E(g, t)]/\partial t|_{t=0}$ ($H(g, 0)$ и $[\partial H(g, t)]/\partial t|_{t=0}$) в дифференциальных формах второго порядка, в которые трансформируется (1) при исключении из рассмотрения вектора H (вектора E). Так, например, уравнение из (8) относительно неизвестной функции $E(g, t)$ должно быть снабжено начальными условиями

$$E(g, 0) = \varphi(g), \quad \frac{\partial}{\partial t} E(g, t)|_{t=0} = \psi(g), \quad g \in \bar{Q}. \quad (10)$$

Вектор-функции $\varphi(g)$, $\psi(g)$ и $F(g, t)$, $t > 0$ (функции мгновенных и токовых источников) имеют, как правило, ограниченный в замыкании области Q носитель.[28]

В корректной постановке задачи важно определение обобщенных функций и обобщенных решений для того чтобы задача была однозначно разрешима.

В качестве примера можно взять простую задачу из теории несинусоидальных волн с геометрией на рис. 1, которая отвечает условию, что все объекты и источники однородны вдоль оси x , т.е. $\partial/\partial x \equiv 0$ и описывают E -переходное состояние E поляризованного поля.

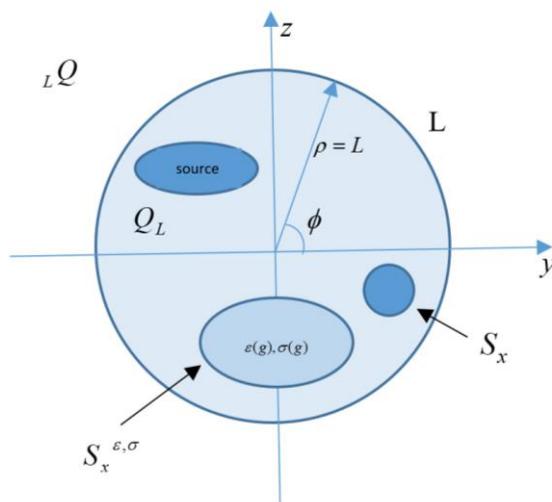


Рисунок 1 – Геометрия задачи

Так ранее рассмотренное уравнение (4) в общем виде записывается следующим образом:

$$P_{\varepsilon, \sigma}[U] \equiv \left[-\varepsilon(g) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma(g) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] U(g, t) = F(g, t), \quad (11)$$

$$g \in Q = R^2 \setminus \overline{\text{int } S_x}, \quad t > 0,$$

Здесь искомая функция $U(g, t) = E_x(g, t)$, $g = \{y, z\}$

Уравнение (11) удовлетворяет граничным условиям Дирихле и начальным данным

$$U(g, t)|_{g \in S_x} = 0, \quad t > 0 \quad (12)$$

$$U(g, 0) = \varphi(g), \quad \left. \frac{\partial U(g, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(g), \quad g \in \bar{Q}. \quad (13)$$

Граница S_x след поверхности S на плоскости $x=0$ — предполагается достаточно гладкой и отвечает начальным данным (см. (10))

Носители функций $\varepsilon(g)-1$, $\sigma(g)$, $\varphi(g)$, $\psi(g)$, $F(g, t)$ и область $\text{int } S_x$ — ограничены.

Таким образом используя обобщенные функции для изветсных нам функций в [28].

пришли к утверждению 1.1 и таким что, пусть $F(g, t) \in L_{2,1}(Q^T)$, $\varphi(g) \in \overset{\circ}{W}_2^1(Q)$, $\psi(g) \in L_2(Q)$, $Q^T = Q \times (0; T)$, $(0; T) = \{t : 0 < t < T < \infty\}$. Тогда задачи (11)–(13) для всех $t \in (0; T)$ имеют обобщенное решение из энергетического класса, и в этом классе обобщенных решений справедлива теорема единственности.

Основная часть моделирования физических процессов состоит в том чтобы решить ее на понятном численном языке для машины, то есть алгебраически описать процессы для компьютера, чтобы она могла нам предоставить результаты в виде чисел, графиков и иллюстраций. К таким методам можно отнести метод конечных разностей.

Как показано в [28] метод конечных разностей сводит простые задачи для рассеивателей, например геометрия которой показано на рис 1., к определению сеточных функций $\bar{u} = U(j, k, m) \approx U(y_j, z_k, t_m)$ удовлетворяющих разностным уравнениям:

$$\left[-\varepsilon(j, k) D_+^t D_-^t + D_+^y D_-^y + D_+^z D_-^z \right] \bar{u} = F(j, k, m) \quad (14)$$

В узлах сетки $g_{jk} = (y_j, z_k) \in Q(h, T)$ на временных слоях $t_m = ml$, $m = 0, 1, \dots, M-1 = T/l$. К (14) необходимо добавить уравнения

$$\begin{cases} U(j, k, 0) = \varphi(j, k), \quad U(j, k, 1) = \varphi(j, k) + l\psi(j, k), \quad g_{jk} \in Q(h, T), \\ U(j, k, m) = 0, \quad g_{jk} \in S_x(h, T), \quad m = 0, 1, \dots, M-1 \end{cases} \quad (15)$$

(разностные аналоги начальных условий (13) и граничного условия (12). Здесь $D_+^y[\bar{u}] = h^{-1}[U(j+1, k, m) - U(j, k, m)]$ и $D_-^y[\bar{u}] = h^{-1}[U(j, k, m) - U(j-1, k, m)]$ - стандартные операторы правой и левой разностных производных; $y_j = jh$, $z_k = kh$, $j, k = 0, \pm 1, \dots, h > 0$ и $l > 0$ - шаги сетки по пространственным переменным и по переменной времени; все сеточные функции $f(j, k)$ в узлах $g_{jk} \in Q(h, T)$ строятся по $f(g)$, $g \in Q$ как усреднения

$$f(j, k) = h^{-2} \int_{\omega_h(j, k)} f(g) dg; \quad \omega_h(j, k) = \{g : jh < y < (j+1)h; kh < z < (k+1)h\};$$

$Q(h, T)$ - объединение ячеек $\omega_h(j, k)$, принадлежащих $Q(T)$; $S_x(h, T)$ - граница множества $Q(h, T)$; $Q(T)$ - срез конуса влияния источников $F(g, t)$, $\varphi(g)$ и $\psi(g)$ в области Q в момент

времени $\tau > T$. Очевидно, что уравнения (14), (15) определяют функции \bar{u} однозначно, а вычисление \bar{u} не требует обращения каких либо матричных операторов.

При теоретическом анализе конечно-разностных схем очень важно чтобы схема была устойчива и сходилась. Таким образом получаем следующий вывод.

Пусть финитные в области Q функции $F(g, t)$, $\varphi(g)$, $\psi(g)$ и $\varepsilon(g) - 1$ таковы, что $F(g, t) \in L_{2,1}(Q^T)$, $\varphi(g) \in W_2^1(Q)$, $\psi(g) \in L_2(Q)$ и $\xi \leq \varepsilon^{-1}(g) \leq \eta$; $g \in Q$, а производные $\partial \varepsilon(g) / \partial y$ и $\partial \varepsilon(g) / \partial z$ - ограничены. Тогда нормы $W_2^1(Q^T)$ непрерывных полилинейных восполнений \tilde{u} решений \bar{u} задачи (14), (15) (линейных по каждой переменной интерполяций сеточных функций \bar{u}) равномерно ограничены при любых h и l удовлетворяющих одному из условий

$$\frac{\eta \sqrt{2} l}{\sqrt{\xi} h} < 1, \text{ или } 2\sqrt{\eta} \frac{l}{h} < 1. \quad 16$$

Последовательность $\{\tilde{u}\}_{hl}$ при $hl \rightarrow 0$ сходится слабо в $W_2^1(Q^T)$ и сильно в $L_2(Q^T)$ к решению $U(g, t)$ задачи (11) – (13)

Так как мы бесконечное пространство счета ограничиваем определенным объемом, то не последнюю роль занимает эффективное ограничение пространства. В работе [24] был решен этот вопрос и придуман метод с точными поглощающими условиями, который в полной мере обеспечивает точность и достоверность решений.

В данной статье был описан временной метод решения электродинамических открытых задач в области анализа с постановкой начальных, и краевых условий в ограниченное пространство счета где присутствуют виртуальные границы с точными поглощающими условиями. Таким образом поставленная задача из-за своей точности имеет преимущество над классическими методами анализа и моделирования дифракционных излучений, то есть физика процесса не будет искажена и при корректной постановке всех условий можно получить достоверные результаты, которые применимы в практике.

Список использованных источников

1. Шестопапов В. П. Метод задачи Римана–Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. - Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1971. 400 с.
2. Шестопапов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках. - Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1973. 289 с.
3. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. - М.: Мир, 1974, 327 с.
4. Миттра Р. Вычислительные методы в электродинамике - М.: Мир, 1977. 486 с.
5. R. Petit. Elertromagnetic theory of gratings // New York: Springer, 1980. P. 1-52
6. Левин Л. Теория волноводов: методы решения волноводных задач. - М.: Радио и связь, 1981. 312 с.
7. Шестопапов В. П. Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. - Киев: Наукова думка, 1983. 251 с.
8. Литвиненко Л. Н., Просвирнин С. Л. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. - Киев: Наукова думка, 1984. 240 с.
9. Шестопапов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А. Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции. - Киев: Наукова думка, 1984. 296 с.
10. Шестопапов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. К. Резонансное рассеяние волн. Т. 1. Дифракционные решетки. - Киев: Наукова думка, 1986. 216 с.
11. Шестопапов В. П., Кириленко А. А., Рудь Л. А. Резонансное рассеяние волн. Т. 2. Волноводные неоднородности. - Киев: Наукова думка, 1986. 232 с.
12. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. - М.: Мир, 1987, 312 с.

13. Назарчук З. Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. - Киев: Наукова думка, 1989. 256 с.
14. Шестоपालов В. П., Сиренко Ю. К. Динамическая теория решеток. - Киев: Наукова думка, 1989. С. 189- 202.
15. Шестоपालов В. П., Тучкин Ю. А., Поединчук А. Е., Сиренко Ю. К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции. Аналитическая регуляризация краевых задач электродинамики. - Харьков: Основа, 1997. 84 с.
16. Куриляк Д. Б., Назарчук З. Т. Аналітико-числові методи в теорії дифракції хвиль на конічних клиноподібних поверхнях. - Київ: Наукова думка, 2006. С. 142-158.
17. Felsen L. B., Transient Electromagnetic Fields // New York: Springer, 1976.
18. Борисов В. В. Неустановившиеся поля в волноводах. - Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1991.
19. Miller E. K. Time-domain modelling in electromagnetics // Journ. of Electromag. Waves and Appl. 1994. Vol. 8, № 9/10. P. 1125–1172.
20. Борисов В. В. Электромагнитные поля неустановившихся токов. - С.-Петербург: Издво С.-Петербург. ун-та, 1996. 207 с.
21. He S., Strom S., Weston V. Time domain wave-splittings and inverse problems. // Oxford: Oxford Univ. Press, 1998.
22. Rao S.M. Time domain electromagnetics // San Diego: Academic Press, 1999.
23. Taflove A., Hagness S.C. Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method // Boston: Artech House, 2000. P. 35-65.
24. Sirenko Y. K., Strom S., Yashina N. P. Modelling and analysis of transient processes in open resonant structures. New methods and techniques // New York: Springer, 2007.
25. Engquist B. B., Majda A. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves // Mathematics of Computation, 1977. Vol. 31. P. 629-651.
26. Mur G. Absorbing boundary conditions for the finite difference approximation of the timedomain electromagnetic field equations // IEEE Tr. on EMC., 1981. V. 23. P. 377-382.
27. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. - М.: Наука, 1985.
28. Кравченко В.Ф., Сиренко Ю.К., Сиренко К.Ю. Преобразование и излучение электромагнитных волн открытыми резонансными структурами. Моделирование и анализ переходных и установившихся процессов. - М.: Физматлит, 2011. 320 с.

ӘОЖ 535.37

¹³²Xe ИОНЫМЕН СӘУЛЕЛЕНГЕН MgO КРИСТАЛДАРЫНДА РАДИАЦИЯЛЫҚ АҚАУЛАРДЫҢ ПАЙДА БОЛУЫ

Бейімбет Үміт Бейімбетқызы

beimbet.umit@gmail.com

Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ 4-курс студенті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Ғылыми жетекшісі – Баубекова Г.М.

Кіріспе

Қазіргі уақытта екілік және одан да күрделі кең аймақты оксидтер әртүрлі техникада көптеп қолданылады. Бұл материалдар жоғары температураға төзімді, көптеген қоспалар иондарымен легіріленуі мүмкін және монокристалдар, керамика, жұқа пленкалар, жіп тәрізді кристалдар және т. б. түрінде қолданысқа ие. Металл оксидтері белсенді лазерлік орталар, люминофорлар, плазмалық дисплейлерге арналған материалдар, оптикалық терезелер мен талшықтар, сцинтилляторлар, дозиметриялық материалдар, ядролық және термоядролық энергетикаға арналған конструкциялық және диагностикалық материалдар ретінде қолданылады [1,2].