УДК 519.644.7

ПРИМЕНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ПО НЕТОЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ В ФИНАНСАХ

Апенов Алибек Темиргалиевич
apenov_alibek93@mail.ru
Магистрант 2-курса Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева
Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Г.Е. Таугынбаева

Финансовый инжиниринг – комбинирование финансовых инструментов с различными параметрами риска и доходности для реализации определенной стратегии.Необходимость в финансовом инжиниринге появляется в силу потребности в разработке специальных решений различных проблем управления риском. Особенно если речь идет об управлении крупными финансовыми ресурсами, для которых часто присущи высокие уровни рисков, предупреждение и нейтрализация которых нередко сопровождается разработкой уникальных приемов и методов.

Основным моментом в финансовом инжиниринге является то, что при определенных обстоятельствах цена производной ценной бумаги (деривативa) может быть представлена в виде ожидания – в более общем плане в виде интеграла (см. [1, с.282])

$$E(f) = \int_{[0,1]^d} f(x)dx.$$

Вычисления производной ценной бумаги, таким образом, сводится к вычислению интеграла. Во многих случаях размерность вычисляемого интеграла d является очень большой или даже бесконечной, она обычно будет по крайней мере столь же большой как число временных шагов в моделировании. Это именно тот случай, в котором метод квазиМонте-Карло является привлекательным

$$E(f) = \int_{[0,1]^d} f(x)dx \approx \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f(\xi_k), \quad (1)$$

где $\xi_1,..., \xi_p$ конечная последовательность из $[0,1]^d$, выбранная случайным образом.

Основным техническим инструментарием в финансовой математике при применении метода квази Монте-Карло выступает теория малых дискрепансов(см. [1, с.

283]): «Идея метода малых дискрепансов состоит в построении узлов $\xi_1,\ldots,\xi_p$ так, чтобы ошибка в (1) была минимальной для большого класса функций», где дискрепансом конечного множества точек из $[0,1]^d$ называют число

$$D_s\left(\xi_1,\ldots,\xi_p\right)=\sup_{I=\prod_{j=1}^{s}\left[b_j,d_j\right]\subset[0,1]^s}\left|\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\chi_I(\xi_k)-\prod_{j=1}^{s}\left(d_j-b_j\right)\right|.$$

Здесь $\chi_I\left(t\right)=\begin{cases}1, если\, t\in I\\ 0, если\, t\notin I\end{cases}$ характеристическая функция множества I.

Задача построения сеток $\xi_1,\ldots,\xi_p$ с малым дискрепансом (т.е. равномерно распределенных сеток) является актуальной и относится к разряду сложнейших задач, чему посвящено множество статей (обзор данного вопроса см., напр., в[2] и имеющуюся в ней библиографию).

На примере построения равномерно распределенных сеток (что и составляет метод квази Монте-Карло) прокомментируем современное состояние технических средств финансовой математики в мире.

В финансах сетку $\xi_1,\ldots,\xi_p$ можно понимать как конечное множество точек в которых сосредоточена финансовая и вспомогательная информация.

В целях исключения элемента случайности, присущей к методу Монте-Карло,в построении равномерно распределенных сеток былопроведено множество исследований и построены различные теоретико-числовые сетки. Самыми известными равномерно распределенными последовательностями являются последовательности ван дер Корпута (van der Corput 1935), Холтона (Halton, 1960), Коробова Н.М. (1963),Соболя (Sobol', 1967, 1976), Фауре (Faure 1982), Нидеррейтера (Niederreiter, 1988), Хэммерсли (Hammersley 1964), Бойля (Boyle) (см., напр., [3-6]).

В этом ряду, как отмечается, например, в [2], сетки Коробова

$$\xi_k\left(a\right)\equiv\xi_k\left(a_1,\ldots,a_s\right)=\left(\left\{\frac{a_1}{N}k\right\},\ldots,\left\{\frac{a_s}{N}k\right\}\right)\left(k=1,\ldots,n\right)\quad(2)$$

привлекательны в теоретическом и в вычислительном смысле, в том плане, что несмотря на обильное цитирование результатов нигде не акцентируется, что сетка (2) есть такое *сжатиеинформации*, когда по $s+1$ целым числам выписывается сетка любого объема N .Именно, теоретический и практический интерес к построению сеток вида (2) объясняется, в частности, следующим. В общем случае, для записи сетки объема N требуется sN действительных чисел. Достоинством сеток вида (2) является тот факт, что она полностью определяется, независимо от объема N, заданием $s+1$ целых чисел $\left(N,a_1\left(N\right),\ldots,a_s\left(N\right)\right)\in Z^{s+1}$(и легко выписывается за $\succ\!\prec N$ элементарных арифметических операций), причем каждая координата каждого узла сетки есть обыкновенная дробь с малым, в данных условиях, знаменателем N .

Новизна данной работы заключается в адаптации и применении в разных сферах, в том числе и в финансах новых эффективных алгоритмов построения равномерно распределенных сеток Коробова, полученных в задачах финансового инжиниринга.

В[2]было доказано,что при $l = s+1$- простое число, $r>1$ и всякого $T, T > c(l) > 0$ существуют простое $p, p \neq 1(\bmod l), p \le T$, а также целое число $a, (a,p)=1, a^{\frac{p-1}{l}} \equiv 1(\bmod p)$, для отыскания которых, согласно алгоритму 1-4 из [2], достаточно выполнить $\ll T \ln\ln T$ элементарных арифметических операций, таких, что для сетки

$$\xi_k(a) = \left(\frac{k}{p}, \left\{ \frac{k}{p} a^{\frac{p-1}{l}} \right\}, \ldots, \left\{ \frac{k}{p} a^{\frac{p-1}{l}(s-1)} \right\} \right), \quad k = 1, \ldots, p \, , \tag{3}$$

выполнено

$$\sup_{f(x) \in E_s^r} \left| \int_{[0,1]^s} f(x)dx - \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{p} f(\xi_k(a)) \right| \ll_{r,s} \frac{(\ln T)^{rs+(s-1)}}{T^r} \, .$$

Нами рассмотрена задача получение оценок сверху в задаче численного интегрирования функций из классов Коробова по неточной информации. Справедлива

Теорема.*Пусть* $l = s+1$ *- простое число,* $r>1$ *и всякого* $T, T > c(l)$ *существуют простое* $p, p \neq 1(\bmod l), p \le T$, *а также целое число* $a, (a,p)=1, a^{\frac{p-1}{l}} \equiv 1(\bmod p)$, *для отыскания которых, согласно алгоритму 1-4 из [2], достаточно выполнить* $\ll T \ln\ln T$ *элементарных арифметических операций, таких, что для сетки (3) и* $\varepsilon_N \succ\prec \frac{(\ln T)^{rs+(s-1)}}{T^r}$ *выполнено*

$$\sup_{\substack{f(x) \in E_s^r \\ \{\gamma_T^{(n)}\}_{n=1}^T \\ |\gamma_T^{(n)}| \le 1}} \left| \int_{[0,1]^s} f(x)dx - \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{p} \left(f(\xi_k(a)) + \varepsilon_N \gamma_N^{(n)} \right) \right| \ll_{r,s} \frac{(\ln T)^{rs+(s-1)}}{T^r} \, .$$

Списоклитературы

1. GlassermanP. MonteCarloMethodsinFinancialEngineering. – NewYork: Springer.-2003, p. 606.
2. Темиргалиев Н., Баилов Е.А., Сихов М.Б. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных //Журнал вычислительной математики и математической физики.-Т.54, № 7.- 2014, С. 1059–1077.
3. Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. – М.: Физматгиз, 1963, 224 с.
4. Hlawka E., Firneis F., Zinterhof P. Zahlentheoretische Methoden in der numerischen Matheatik. Wien; München; Oldenbourg. 1981.- P.149
5. Hua Loo Keng, Wang Yuan. Application of Number Theory of Numerical Analysis. – Berlin; Heidelberg: New York: Springer Yerlag. 1981.- P. 241
6. Кейперс Л., Нидеррейтер Г.Равномерное распределение последовательностей. – М.:Наука.1985. -407 с.