

УДК 517

НЕРАВНОМЕРНЫЕ ОЦЕНКИ В ЛОКАЛЬНОЙ ФОРМЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ

Н.Т.Каюпов

nkayupov@gmail.com

Магистрант механико-математического факультета

ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, г.Нур-Султан, Казахстан

Научный руководитель – кфмн, доцент **М.Б. Габбасов**

Ключевые термины: центральная предельная теорема, оценка скорости сходимости, оценки точности нормированной аппроксимации, квазинеравномерная оценка.

AMS Mathematics Subject Classification: 60F05.

Аннотация. В статье рассматривается схема суммирования, в которой участвуют независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним, единичной дисперсией и конечным четвертым моментом. В качестве условия, гарантирующего существование плотностей, в статье автор использует интегрируемость на всей действительной оси модуля характеристической функции суммируемых случайных

величин в некоторой положительной степени. Автором, при дополнительном условии, которое состоит в том, что предполагается существование четвертого момента, получена квазиравномерная оценка величины $|p_n(x) - \varphi(x)|$, правая часть которой имеет вид $\frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{2\pi n}} |x^3 - 3x|e^{-x^2/2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$, где α_3 — третий момент суммируемых случайных величин, причём для величины $O\left(\frac{1}{n}\right)$ указана явная оценка. Эта оценка имеет преимущества как перед известными равномерными, так и перед неравномерными оценками.

1. Постановка задачи неравномерной оценки случайных величин

Хорошо известно, что сумма большого числа независимых случайных величин распределена асимптотически нормально, если только слагаемые вносят равномерно малый вклад в сумму. Этот факт называется центральной предельной теоремой (ЦПТ).

Это значит, что чем больше независимых слагаемых в сумме, тем ближе закон ее распределения к нормальному. Вместо суммы часто рассматривают среднее арифметическое большого числа случайных величин, оно отличается от суммы только множителем $(1/n)$, поэтому его распределение также стремится к нормальному с ростом числа n суммируемых величин. Поскольку случайные величины, с которыми мы сталкиваемся, например, при измерениях, суть результаты действия множества независимых факторов, понятно, почему измеряемые значения, как правило, распределены нормально.

Пусть X_1, X_2, \dots - независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним $EX_1 = 0$, единичной дисперсией $DX_1 = \sigma^2 = 1$, конечным четвертым моментом $\beta_4 = E|X_1|^4$ и общим распределением P . Обозначим P_n распределение нормированной суммы $\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}\right)$, F_n - функция распределения P_n и Φ - стандартный нормальный закон с плотностью $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Предположение о нулевом среднем и единичности дисперсии не умаляет общности результата.

Самой известно оценкой скорости сходимости в ЦПТ является оценка Берри-Эссеена:

$$\rho(F_n, \Phi) = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - \Phi(x)| \leq c_0 \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} \quad (1.1)$$

при конечном абсолютном третьем моменте $\beta_3 = E|X_1|^3 < \infty$.

Для константы c_0 известна следующая численная оценка

$$0.4097 \approx \frac{\sqrt{10+3}}{6\sqrt{2\pi}} \leq c_0 \leq 0.4784.$$

(нижняя была получена Эссееном в [1], а верхняя в [2].)

Следует упомянуть об оценке, полученной в [3]

$$\rho(F_n, G) \leq \frac{\sqrt{10+3}}{6\sqrt{2\pi}} \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} + 2.58 \left(\frac{\beta_3}{\sqrt{n}}\right)^2.$$

После получения этого результата, дальнейшее уточнение неравенства Берри-Эссеена становится бессмысленным.

Оценка скорости сходимости $F_n(x)$ к $G(x)$, устанавливаемая неравенством (1.1), равномерна по x .

Исторически первая неравномерная оценка была получена в работе [4]. Для случая существования третьего момента было доказано существование конечной положительной абсолютной постоянной A такой, что для любого $x \in R$ справедливо неравенство

$$(1 + x^2)|F_n(x) - \Phi(x)| \leq A \frac{\beta_3}{\sqrt{n}}$$

Этот результат был усилен в [5], где было показано, что существует такое $c > 0$, что

$$\sup_x (1 + |x|^3) |F_n(x) - \Phi(x)| \leq c \frac{\beta_3}{\sqrt{n}}. \quad (1.2)$$

При этом для рассматриваемых условий на моменты слагаемых оценка (1.2) не улучшаема и по n и по x без дополнительных предположений.

А в работе Михеля [6] было показано, что значение абсолютной константы c в (1.2): $c \leq c_0 + 8(1 + e)$, что с учетом оценки $c_0 \leq 0.4784$, полученной в [2,7], влечет оценку $c \leq 30.2247$. Эта оценка была уточнена в [8], где было показано, что $c \leq 25.7984$, а в 2012 году верхняя оценка была существенно улучшена [9] и не превосходит $c \leq 18.12$.

В данной работе получена оценка точности нормированной аппроксимации, при дополнительных условиях на распределения случайных величин.

Абсолютная постоянная в неравномерных оценках существенно больше, чем абсолютная постоянная в равномерных оценках, поэтому традиционные неравномерные оценки вида (1.2) оказываются точнее равномерных лишь при достаточно больших значениях $|x|$.

Аналоги упомянутых оценок справедливы и в локальной форме ЦПТ для плотностей распределений.

Предположим, что характеристическая функция f распределения P такова, что для некоторого $\nu > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^\nu dt < \infty. \quad (1.3)$$

При выполнении этого условия у распределения P_n для $n \geq \nu$ существует непрерывная ограниченная плотность p_n , которую можно вычислить по формуле обращения

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

ЦПТ в локальной форме утверждает, что

$$p_n(x) \rightarrow \varphi(x), \quad n \rightarrow \infty$$

равномерно по всем действительным x , и мы можем при расчетах заменять $p_n(x)$ на $\varphi(x)$. Однако при такой замене всегда возникает некоторая ошибка и естественно возникает вопрос о величине этой ошибки. Так приходят к задаче о точности аппроксимации в ЦПТ, или говорят еще об оценке скорости сходимости в ЦПТ.

Не трудно понять, что из выполнения условия (1.3) следует, что $f(t) \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$ и величина

$$\alpha(T) = \max\{|f(t)| : |t| \geq T\}$$

строго меньше единицы для любого $T > 0$.

Введем пару (μ, T) , где функция $\mu(t)$, $e^{-t^2/2} \leq \mu(t) \leq 1$, и число $T > 0$ таковы, что

$$|f(t)| \leq \mu(t)$$

при всех $|t| \leq T$.

С помощью этой пары определим числа

$$B_{k,n-j} = \frac{1}{2\pi} \int_{-T\sqrt{n}}^{T\sqrt{n}} |t|^k \mu^{n-j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt, \\ k > 0, n \geq 3, 0 \leq j \leq n - 2$$

Для распределения P с конечным четвертым моментом пару (μ, T) можно подобрать так, что

$$B_{k,n-j} \rightarrow B_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k \varphi(x) dx \quad (A)$$

при $n \rightarrow \infty$ для любых фиксированных k и j , где φ - плотность стандартного нормального закона.

Следует отметить, что абсолютный момент порядка $s > 0$ распределения P можно вычислять по формуле

$$\beta_s = s \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{s-1} |E_0(x) - F(x)| dx, \quad s > 0,$$

E_0 - вырожденная функция распределения с единичным скачком в нуле, аналогичная формула для обычных моментов имеет вид

$$\alpha_k = k \int_{-\infty}^{\infty} x^{k-1} (E_0(x) - F(x)) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Нетрудно заметить, что сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{k-1} (F_n(x) - E_0(x)) dx,$$

влечет существование абсолютного момента порядка k у распределения P_n , и наоборот. Этот интеграл и интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{k-1} (F_n(x) - G(x)) dx,$$

сходятся и расходятся одновременно.

2. Решение

Будем использовать многочлены Чебышева - Эрмита

$$H_k(x) = (-1)^k \varphi^k(x) / \varphi(x),$$

где $k = 0, 1, \dots$, и формулы обращения

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} (it)^k e^{-t^2/2} dt = H_k(x) \varphi(x), \quad k = 0, 1, \dots$$

Нам понадобятся только

$$H_0(x) \equiv 1, H_1(x) = x, H_2(x) = x^2 - 1, H_3(x) = x^3 - 3x,$$

$$H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3, H_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x, H_6(x) = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15.$$

Ниже доказаны следующие неравенства

$$|p_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{2\pi n}} |x^3 - 3x| e^{-x^2/2} + |R_0| + |M_0|, (*)$$

где

$$|R| \leq \frac{\beta_4+3}{24n} B_{4,n-1} + \frac{\alpha_3^2}{72n} B_{6,n-2} + \frac{|\alpha_3|}{12n^{3/2}} B_{5,n-1} + \frac{\alpha_3(\beta_4+3)}{288 \cdot n^{3/2}} B_{7,n-2}.$$

$$|p_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{2\pi n}} |x^3 - 3x| e^{-x^2/2} + \frac{|R_1|}{|x|} + \frac{|M_1|}{|x|}, (**)$$

где

$$\begin{aligned} |R_1| \leq & \frac{\beta_4+3}{n} \left[\frac{B_{5,n-2}}{24} + \frac{B_{3,n-1}}{6} \right] + \frac{\alpha_3^2}{n} \left[\frac{B_{7,n-3}}{72} + \frac{B_{5,n-2}}{12} \right] + \\ & + \frac{|\alpha_3|}{n^{3/2}} \left[\frac{B_6}{6} \left(\frac{n}{n-2} \right)^{7/2} + \frac{B_4}{6} \left(\frac{n}{n-2} \right)^{5/2} + \frac{B_4}{4} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{5/2} \right] + \\ & + \frac{|\alpha_3|(\beta_4+3)}{n^{3/2}} \left[\frac{B_{8,n-3}}{288} + \frac{B_{6,n-2}}{48} \right]. \end{aligned}$$

$$|p_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{2\pi n}} |x^3 - 3x| e^{-x^2/2} + \frac{|R_2|}{x^2} + \frac{|M_2|}{x^2}, (***)$$

где

$$\begin{aligned} |R_2| \leq & \frac{\beta_4+3}{n} \left[\frac{B_{6,n-3}}{24} + \frac{3B_{4,n-2}}{8} + \frac{B_{2,n-1}}{2} \right] + \frac{\alpha_3^2}{n} \left[\frac{B_{8,n-4}}{72} + \frac{13B_{6,n-3}}{72} + \frac{B_{4,n-2}}{6} \right] + \\ & + \frac{|\alpha_3|}{n^{3/2}} \left[\frac{B_5}{2} \left(\frac{n}{n-3} \right)^3 + B_3 \left(\frac{n}{n-2} \right)^2 + \frac{B_7}{4} \left(\frac{n}{n-3} \right)^4 + \frac{7B_5}{6} \left(\frac{n}{n-2} \right)^3 + \frac{B_3}{2} \left(\frac{n}{n-1} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{|\alpha_3|(\beta_4+3)}{n^{3/2}} \left[\frac{B_{9,n-4}}{144} + \frac{13B_{7,n-3}}{288} + \frac{B_{5,n-2}}{24} \right] + \frac{|\alpha_3|\beta_3 B_{4,n-2}}{n^{3/2} \cdot 4}. \end{aligned}$$

$$|p_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{|\alpha_3|}{6\sqrt{2\pi n}} |x^3 - 3x| e^{-x^2/2} + \frac{|R_3|}{|x^3|} + \frac{|M_3|}{|x^3|}, (****)$$

где

$$\begin{aligned}
 |R_3| \leq & \frac{\beta_4+3}{n} \left[\frac{B_{7,n-4}}{24} + \frac{5B_{5,n-3}}{8} + 2B_{3,n-2} + B_{1,n-1} \right] + \\
 & + \frac{\alpha_3^2}{n} \left[\frac{B_{9,n-5}}{72} + \frac{7B_{7,n-4}}{24} + \frac{3B_{5,n-3}}{8} + \frac{B_{3,n-2}}{6} \right] + \\
 & + \frac{|\alpha_3|}{n^{3/2}} \left[\frac{B_8}{3} \left(\frac{n}{n-4} \right)^{9/2} + 3B_6 \left(\frac{n}{n-3} \right)^{7/2} + \frac{9B_4}{2} \left(\frac{n}{n-2} \right)^{5/2} + \frac{B_2}{2} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{3/2} \right] + \\
 & + \frac{|\alpha_3|(\beta_4+3)}{n^{3/2}} \left[\frac{B_{10,n-5}}{288} + \frac{7B_{8,n-4}}{96} + \frac{3B_{6,n-3}}{32} + \frac{B_{4,n-2}}{24} \right] + \frac{|\alpha_3|\beta_3}{n^{3/2}} \left[\frac{3B_{5,n-3}}{4} + \frac{3B_{3,n-2}}{2} \right] + \frac{2}{\pi n^2}.
 \end{aligned}$$

Следует отметить, что слагаемые, входящие в M_0, M_1, M_2, M_3 , при росте n убывают экспоненциально быстро. Для некоторых распределений их можно опустить. Такими распределениями являются те, для которых в определении $B_{k,n-j}$ можно перейти к пределу по $T \rightarrow \infty$. В частности, таким распределением является экспоненциальное. Поэтому далее мы рассматриваем только оценки величины R_j .

Вычисление асимптотических значений B_k приводит к неравенствам

$$|R_0| \leq 0.05 \cdot \frac{\beta_4+3}{n} + 0.08 \cdot \frac{\alpha_3^2}{n} + 0.21 \cdot \frac{|\alpha_3|}{n^{3/2}} + 0.05 \cdot \frac{|\alpha_3|(\beta_4+3)}{n^{3/2}},$$

$$|R_1| \leq 0.21 \cdot \frac{\beta_4+3}{n} + 0.42 \cdot \frac{\alpha_3^2}{n} + 1.5 \cdot \frac{|\alpha_3|}{n^{3/2}} + 0.27 \cdot \frac{|\alpha_3|(\beta_4+3)}{n^{3/2}},$$

$$|R_2| \leq 0.9 \cdot \frac{\beta_4+3}{n} + 1.8 \cdot \frac{\alpha_3^2}{n} + 9.0 \cdot \frac{|\alpha_3|\beta_3}{n} + 1.6 \cdot \frac{|\alpha_3|}{n^{3/2}} + 0.3 \cdot \frac{|\alpha_3|(\beta_4+3)}{n^{3/2}},$$

$$|R_3| \leq 3.8 \cdot \frac{\beta_4+3}{n} + 7.2 \cdot \frac{\alpha_3^2}{n} + 37.5 \cdot \frac{|\alpha_3|\beta_3}{n} + 4.9 \cdot \frac{|\alpha_3|}{n^{3/2}} + 2.8 \cdot \frac{|\alpha_3|(\beta_4+3)}{n^{3/2}} + \frac{2}{\pi n^2}.$$

Найдем отношение коэффициентов при $\beta_4 + 3$ из оценок R_{j+1} к соответствующему коэффициенту из R_j , $j = 0, 1, 2$

$$\frac{0.21}{0.05} \sim 4.2, \frac{0.9}{0.21} \sim 4.3, \frac{3.8}{0.9} \sim 4.2.$$

Понятно, что при $x > 4.3$ оценка R_{j+1} становится точнее оценки R_j .

Таким образом, оценка разности $|p_n(x) - \varphi(x)|$, указанная в (*), улучшается неравенствами (**)-(****) лишь при больших значениях x . Эти значения x находятся в зоне больших отклонений, которая начинается с $x > n^{1/6}$, то есть при $n = 1600$, $x \sim 3.41$.

3 Графическая иллюстрация полученной оценки

Рассмотрим нашу функцию распределения

$$F_n(x) = P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n}{\sqrt{n}} < x\right), \quad (3.1)$$

где случайные величины X_1, X_2, \dots – независимы и имеют распределение с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } x < -1 \\ e^{-(x+1)} & \text{если } x \geq -1 \end{cases} \quad (3.2)$$

Эти случайные величины имеют нулевое среднее, единичную дисперсию, $\alpha_3 = 2$, $\beta_4 = 9$.

Хорошо известно, что свертка n плотностей

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } x < 0 \\ e^{-x} & \text{если } x \geq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

имеет вид

$$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

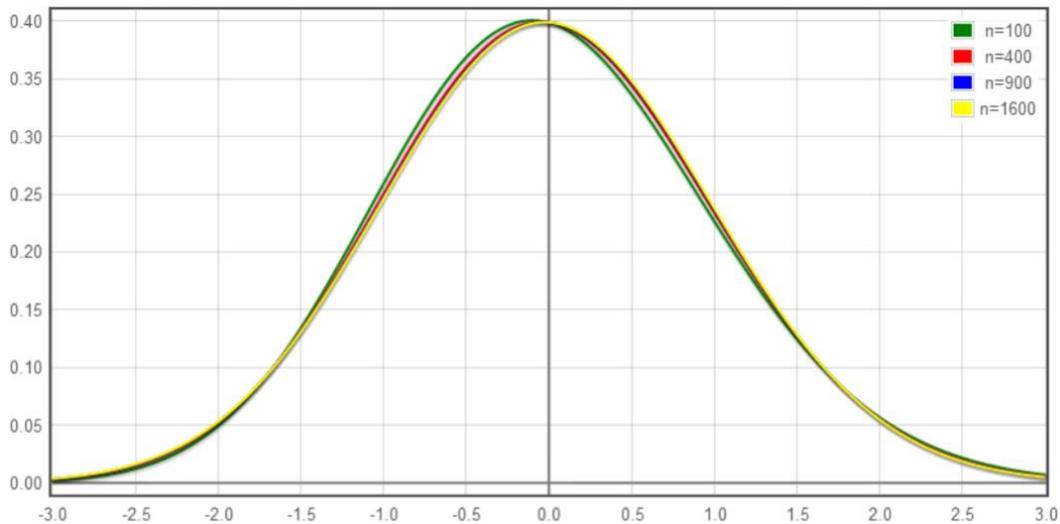
Это распределение называется распределением Эрланга. Отсюда следует, что

$$p_n(x) = \sqrt{n} \frac{n^n}{n! e^n} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} e^{-x\sqrt{n}},$$

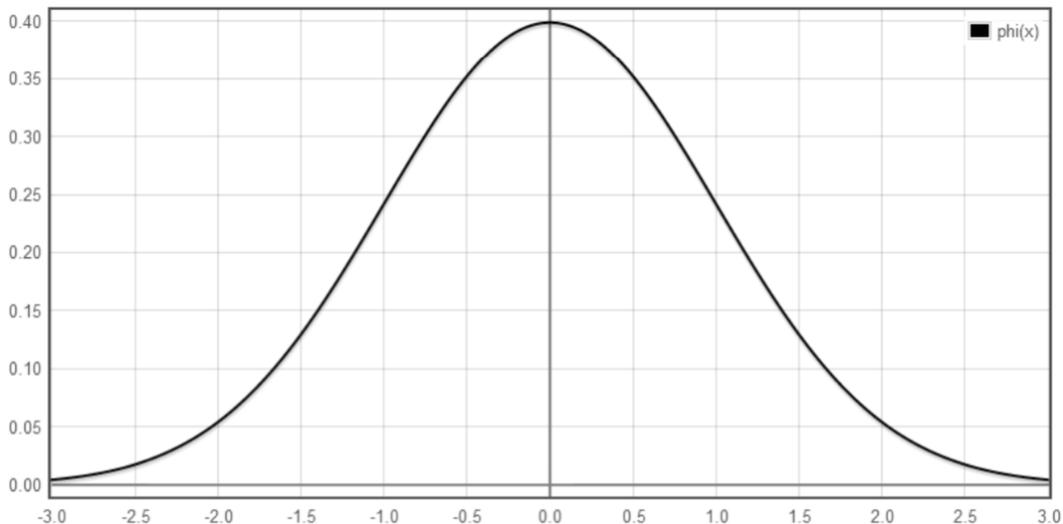
а функция распределения равна

$$F_n(x) = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x\sqrt{n}+n)^j}{j!} e^{-(x\sqrt{n}+n)}.$$

Рассмотрим графики функций $p_n(x)$ при $n = 100, 400, 900, 1600$ (Рисунок 3.1) и график функции $\varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ (Рисунок 3.2).

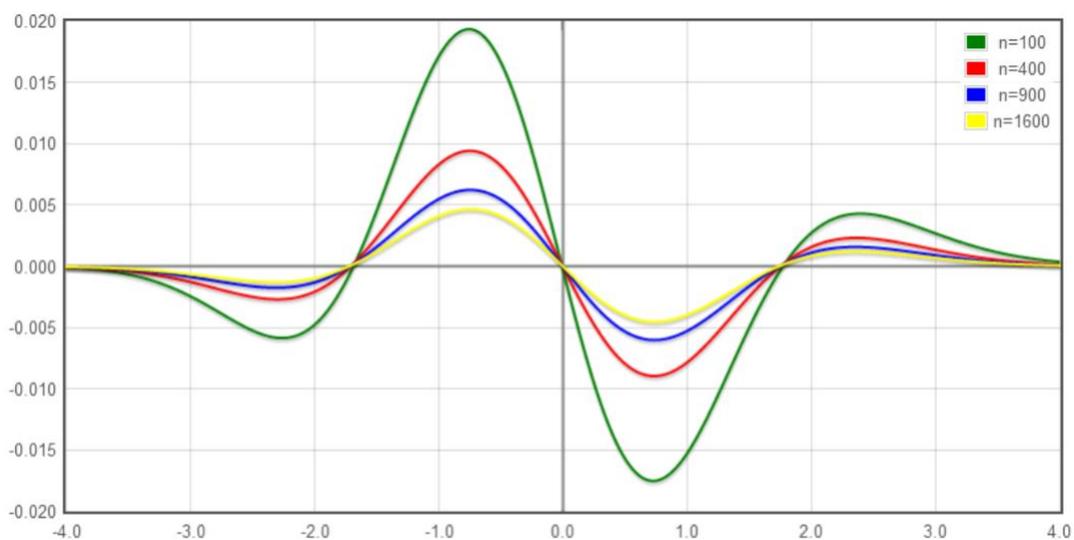


(Рисунок 3.1 - Распределение Эрланга)



(Рисунок 3.2 - Функция нормального распределения)

Теперь рассмотрим графики разностей $p_n(x) - \varphi(x)$ при $n = 100, 400, 900, 1600$

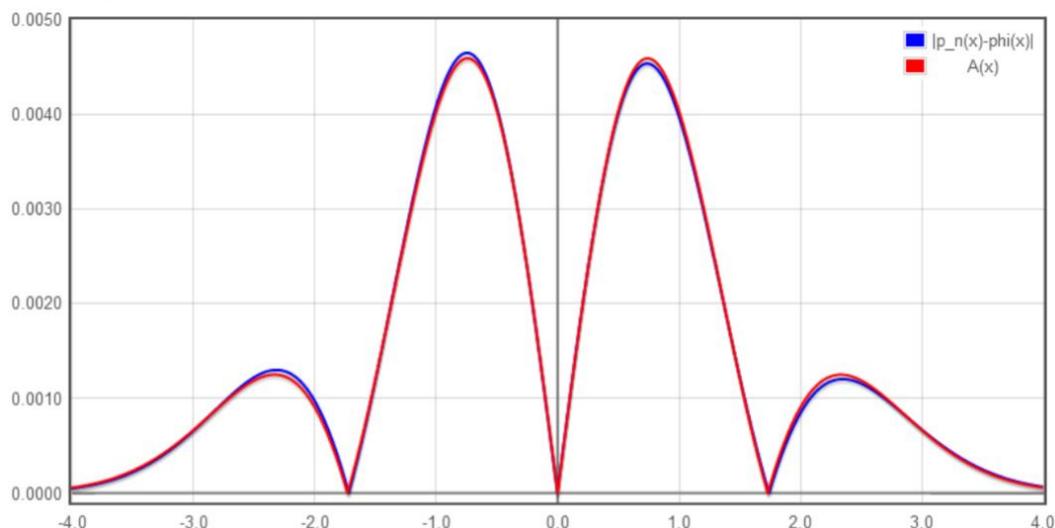


(Рисунок 3.3 - Графики разностей)

Проиллюстрируем модуль разности плотностей $|p_n(x) - \varphi(x)|$ и функцию

$$A(x) = \left| \frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}} H_3(x) \varphi(x) \right|$$

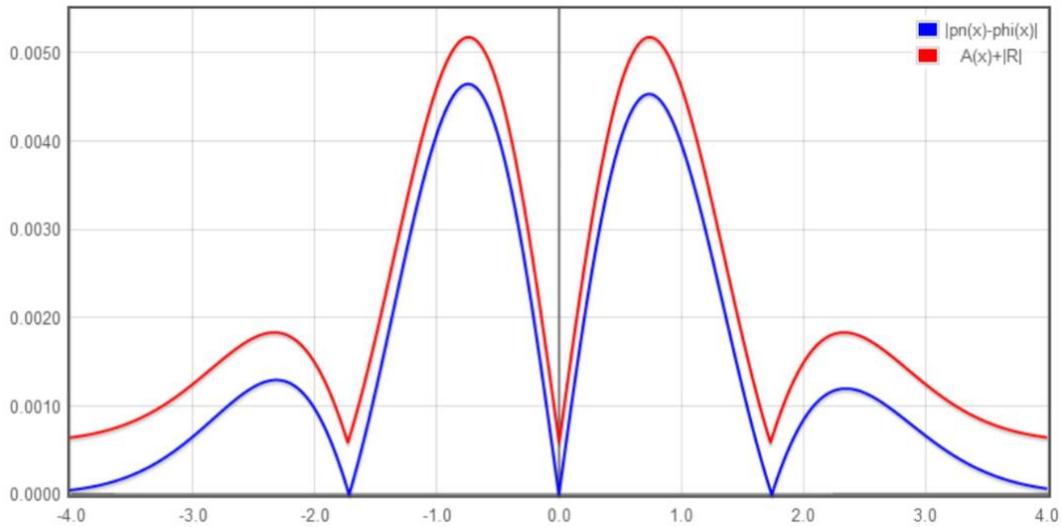
при $n = 1600$. Функция $A(x)$ — является "основной" частью оценки модуля разности, указанной в неравенстве (*)



(Рисунок 3.4 - Симметричное отображение)

Эта функция хорошо передает изменение $|p_n(x) - \varphi(x)|$ при изменении x , но оценивать ее не может, т.к. функция $A(x)$ обращается в нуль в точках $x = 0, x = -\sqrt{3}$ и $x = \sqrt{3}$.

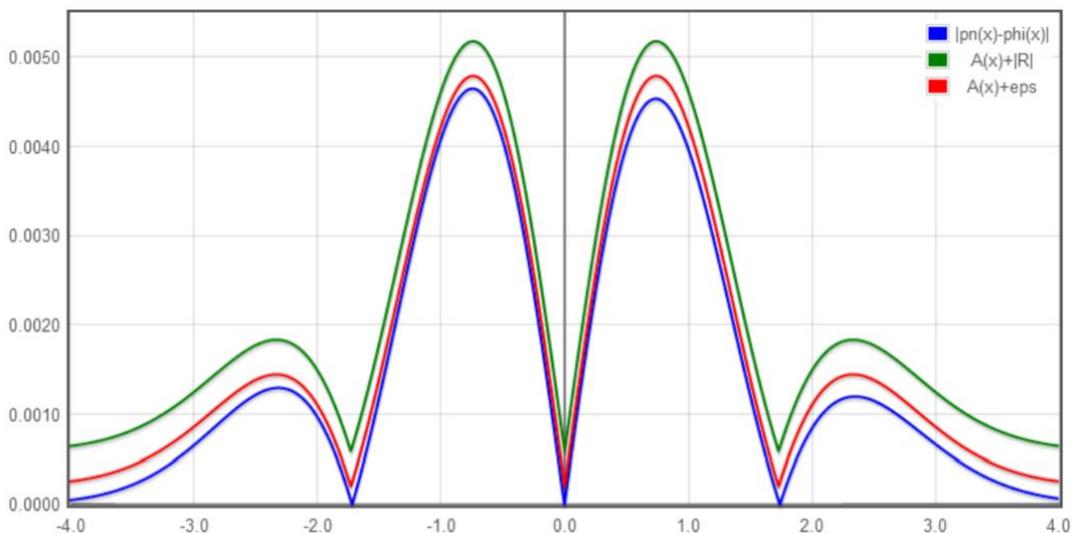
Рассмотрим графики модуля разности $|p_n(x) - \varphi(x)|$ и $A(x) + |R_0|$ при $n = 1600$, где $A(x) + |R_0|$, где R_0 из неравенства (*), т.е. $|R_0| \approx 0.00058781$



(Рисунок 3.5 - Отображение 2 фаз)

Выберем такое $\varepsilon > 0$, чтобы график $A(x) + \varepsilon$ касался графика $|p_n(x) - \varphi(x)|$ в окрестности нуля.

Изобразим графики модуля разности $|p_n(x) - \varphi(x)|$, $A(x) + |R_0|$ и $A(x) + \varepsilon$ при $n = 1600$, положив, что $\varepsilon = 0,0002$



(Рисунок 3.6 - Отображение 3 фаз)

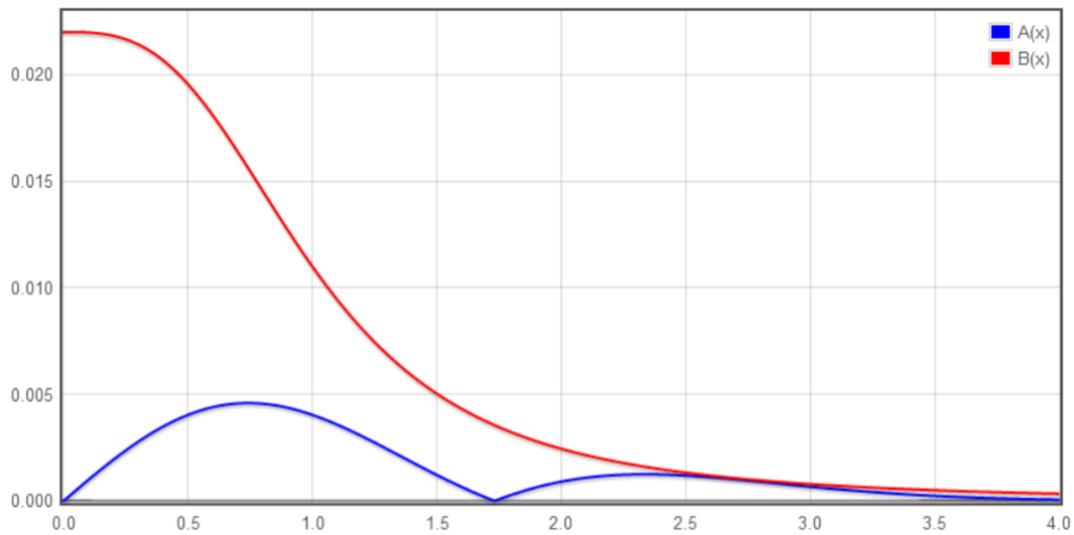
Видно, что величина $A(x) + \varepsilon$ оценивает разность, при этом значение ε не намного меньше R_0 .

4 Улучшение традиционной неравномерной оценки при дополнительных условиях

Рассмотрим следующее неравенство

$$|p_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{c}{1+|x|^3} \frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}}. \quad (4.1)$$

Отметим, что вид оценки в правой части этого неравенства близок к виду традиционной неравномерной оценки (1.2). График оценки, указанной в правой части (2.4) касается графика разности при $c = 0.44$



(Рисунок 4.1 - Положительное отображение)

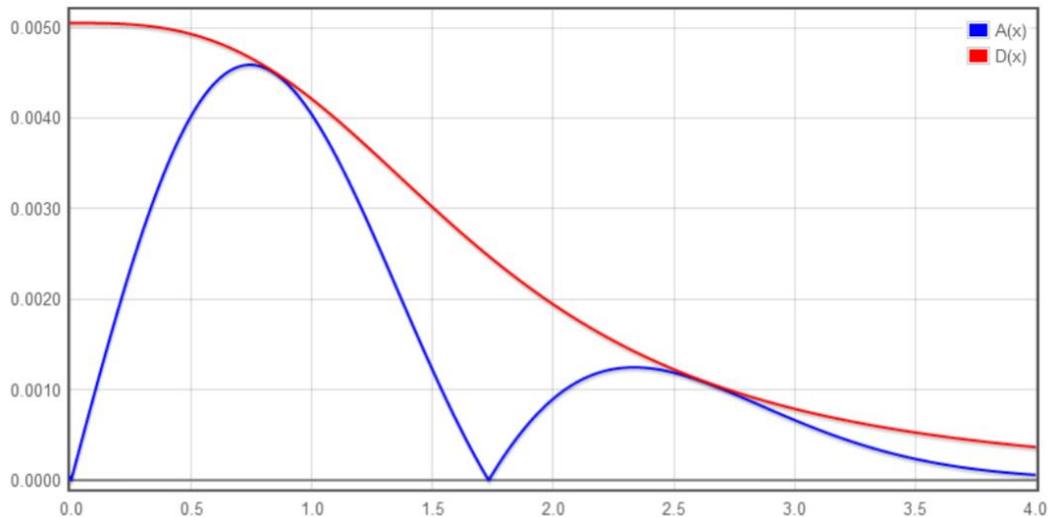
Видно, что при $x < 2$ традиционная неравномерная оценка "плохо" оценивает разность.

Изменим постановку задачи. Рассмотрим величину

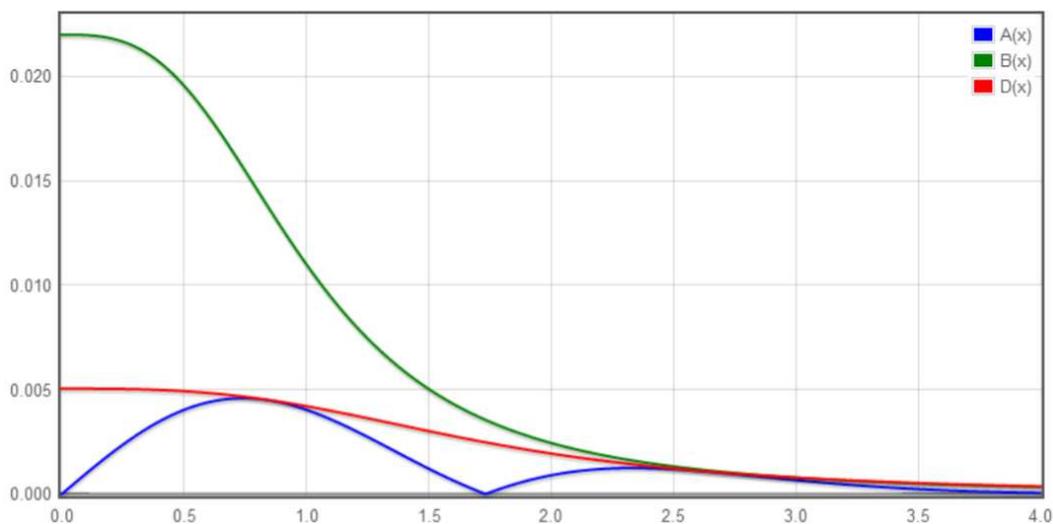
$$\frac{C_a}{a+|x|^3} \frac{\alpha_3}{6\sqrt{n}}, \quad (4.2)$$

и подберем такие C_a и a чтобы график величины (2.5) касался графика разности в двух точках.

Получили, что $C_a = 0,505$ и $a = 5$ (Рисунок 4.2)



(Рисунок 4.2 - Оценка при $a=5$)



(Рисунок 4.3 - Оценка при $a=6$)

Видно, что полученная оценка (2.6) при найденных параметрах значительно лучше оценивает модуль разности, нежели традиционная неравномерная оценка.

Список литературы

- [1] Esseen C.G. A moment inequality with an application to the central limit theorem // Skand. Aktuarietidskr, 1956. Vol. 39. P. 160–170.
- Королев В.Ю., Шевцова И. Г. Уточнение неравенства Берри–Эссеена с приложениями к пуассоновским и смешанным пуассоновским случайным суммам //Обзорные прикладной и промышленной математики, 2010. Т. 17. Вып. 1. С. 25–56.
- Шевцова И. Г. Оптимизация структуры моментных оценок точности нормальной аппроксимации для распределений сумм независимых случайных величин // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико- математических наук, 2013. С. 191.
- Мешалкин Л.Д., Рогозин Б. А. Оценка расстояния между функциями распределения по близости их характеристических функций и ее применение к центральной предельной теореме // Предельные теоремы теории вероятностей. — Ташкент: АН УзССР, 1963. С. 40–55.
- Нагаев С. В. Некоторые предельные теоремы для больших уклонений // Теория вероятностей и ее применения, 1965. Т. 10. Вып. 2. С. 231–254.
- Michel R. On the constant in the nonuniform version of the Berry–Esseen theorem // Z. Wahrsch. verw. Geb., 1981. Bd. 55. P. 109–117.
- Korolev V., Shevtsova I. An improvement of the Berry Esseen inequality with applications to Poisson and mixed Poisson randomsums // Scandinavian Actuarial J., 2010. <http://www.informaworld.com/10.1080/03461238.2010.485370>.
- Нефедова Ю. С., Шевцова И. Г. О точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм // Информатика и её применения, 2011. Т. 5. Вып. 1. С. 39–45.
- Нефедова Ю. С., Шевцова И. Г. О неравномерных оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме // Теория вероятн. и ее примен. 2012. Т.57, №1. С.62-97.
- Сенатов В.В. Центральная предельная теорема: точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Книжный дом "Либроком", 2009,352с.