УДК. 517.51

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ С ВЕСОМ ДВОЙНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ ИЗ КЛАССА $R_0^+BVS^2$

Калмуратов Ракымжан Алдамжарулы
rahimzhan_940@mail.ru
Магистрант механико-математического факультета
ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
Научный руководитель – Ж.Б. Муканов

В работе изучаются вопросы интегрируемости с весом рядов

$$g(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{jk}\sin jx \sin ky \qquad (1)$$
и
$$f(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{jk}\cos jx \cos ky \qquad (2)$$

Запишем следующее определение (см. [1]). Нуль-последовательность положительных чисел $c:=\{c_n\}$ принадлежит классу R_0^+BVS, если неравенство $\sum_{n=m}^{\infty}|c_n-c_{n+1}|\le K\cdot c_m$ справедливо для всех натуральных m. Класс таких последовательностей был введен Лейндлером в [1].

Через $g(x)$ и $f(x)$ обозначим суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n \sin nx$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n \cos nx$ соответственно. В работе [2] Тихонова рассмотрена следующая задача: найти необходимые и достаточные условия интегрируемости в p-той степени сумм синус- и косинус-рядов с весом γ. В качестве решения наложены условия на коэффициенты $\{\lambda_n\}$, которые, в зависимости от γ, являются достаточными или необходимыми. Эти результаты сформулируем в следующих двух теоремах.

Теорема А. Пусть $\{\lambda_n\}\in R_0^+BVS$ и $1\le p<\infty$.

1) Если последовательность $\{\gamma_n\}$ удовлетворяют условию: существует $\varepsilon_1>0$ такое, что последовательность $\{\gamma_n n^{-p-1+\varepsilon_1}\}$ является почти убывающей, то условие
$$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n n^{p-2}\lambda_n^p<\infty \qquad (3)$$
достаточно для выполнения условия
$$\gamma(x)|\,g(x)\,|^p\in L(0,\pi). \qquad (4)$$

2) Если последовательность $\{\gamma_n\}$ удовлетворяет условию: существует $\varepsilon_2>0$ такое, что последовательность $\{\gamma_n n^{p-1-\varepsilon_2}\}$ является почти возрастающей, то условие (3) необходимо для выполнения условия (4).

Теорема Б. Пусть $\{\lambda_n\}\in R_0^+BVS$ и $1\le p<\infty$.

1) Если последовательность $\{\gamma_n\}$ удовлетворяют условию: существует $\varepsilon_3>0$ такое, что последовательность $\{\gamma_n n^{-1+\varepsilon_3}\}$ является почти убывающей, то условие
$$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n n^{p-2}\lambda_n^p<\infty \qquad (5)$$
достаточно для выполнения условия
$$\gamma(x)|\,f(x)\,|^p\in L(0,\pi). \qquad (6)$$

2) Если последовательность $\{\gamma_n\}$ удовлетворяет условию: существует $\varepsilon_4>0$ такое, что последовательность $\{\gamma_n n^{p-1-\varepsilon_4}\}$ является почти возрастающей, то условие (5) необходимо для выполнения условия (6).

Функция $\gamma(x)$ определяется по последовательности $\{\gamma_n\}$ следующим образом: $\gamma(\pi/n):=\gamma_n$, $n\in N$, и существуют положительные константы A и B такие, что

$A\gamma_n \le \gamma(x) \le B\gamma_{n+1}$ для $x \in (\pi/n+1, \pi/n)$. Последовательность положительных чисел $\gamma := \{\gamma_n\}$ называется почти возрастающей (почти убывающей), если неравенство $C\gamma_n \ge \gamma_m$ $(\gamma_n \le C\gamma_m)$ справедливо для всех натуральных $n \ge m$.

Здесь и в дальнейшем через C будем обозначать положительные постоянные, вообще говоря, разные в различных формулах.

Нашей целью является распростарение этих результатов на случай двойных рядов вида (1) и (2). Для начала введем необходимые определения.

Определение 1. Говорят, что последовательность положительных чисел $a := \{a_{jk}\}$, удовлетворяющая условию $a_{jk} \to 0$ при $j+k \to \infty$, принадлежит классу $R_0^+ BVS^2$, если выполняются неравенства

$$\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_{11} a_{jk}| \le C a_{mn} \quad \text{при всех } m,n \in N$$

и

$$\sum_{j=m}^{\infty} |\Delta_{10} a_{jk}| \le C a_{mk} \quad \text{при каждом фиксированном } k,$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_{01} a_{jk}| \le C a_{jn} \quad \text{при каждом фиксированном } j,$$

где

$$\Delta_{11} a_{jk} = a_{jk} - a_{j+1,k} - a_{j,k+1} + a_{j+1,k+1},$$

$$\Delta_{10} a_{jk} = a_{jk} - a_{j+1,k},$$

$$\Delta_{01} a_{jk} = a_{jk} - a_{j,k+1}.$$

Определение 2. Говорят, что последовательность положительных чисел $\gamma := \{\gamma_{mn}\}$ почти возрастает (почти убывает), если для некоторой константы $C > 0$ и для всех натуральных $m_2 \ge m_1$, $n_2 \ge n_1$ выполнено неравенство

$$C\gamma_{m_2 n_2} \ge \gamma_{m_1 n_1} \ (\gamma_{m_2 n_2} \le C\gamma_{m_1 n_1}).$$

Определим функцию $\gamma(x, y)$ по последовательности $\{\gamma_{mn}\}$ следующим образом:

$$\gamma\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}\right) = \gamma_{mn} \quad \forall\, m,n \in N,$$

и существуют положительные константы A и B такие, что имеют место неравенства:

$$A\gamma_{mn} \le \gamma(x, y) \le B\gamma_{m+1,n+1} \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{m+1}, \frac{\pi}{m}\right),\ y \in \left(\frac{\pi}{n+1}, \frac{\pi}{n}\right).$$

Нами доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $g(x, y)$ - сумма ряда (1), $\{\lambda_{jk}\} \in R_0^+ BVS^2$, $1 \le p < \infty$, и последовательность положительных чисел $\{\gamma_{jk}\}$ удовлетворяет условию: $\exists$ нкоторые $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ такие, что последовательность $\{\gamma_{jk} \cdot j^{-1+\varepsilon_1}\}$ почти убывает при каждом фиксированном k, и последовательность $\{\gamma_{jk} \cdot k^{-1+\varepsilon_2}\}$ почти убывает при каждом фиксированном j. Тогда из условия

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{jk} \cdot (jk)^{p-2} \cdot \lambda_{jk}^p < \infty \qquad (7)$$

следует, что

$\gamma(x,y)\cdot|\,g(x,y)\,|^p\in L(0,\pi)^2$. (8)

Теорема 2. Если последовательность γ_{mn} удовлетворяет условию: существуют $\varepsilon_3,\varepsilon_4>0$ такие, что последовательность $\{\gamma_{mn}m^{p-1-\varepsilon_3}\}$ является почти возрастающей при фиксированном n, и последовательность $\{\gamma_{mn}n^{p-1-\varepsilon_4}\}$ является почти возрастающей при фиксированном m. То условие (7) необходимо для выполнения условия (8).

Теорема 3. Пусть $f(x,y)$ - сумма ряда (2), $\{\lambda_{jk}\}\in R_0^+BVS^2$, $1\le p<\infty$, и последовательность положительных чисел $\{\gamma_{jk}\}$ удовлетворяет условию: $\exists$ некоторые $\varepsilon_5,\varepsilon_6>0$ такие, что последовательность $\{\gamma_{jk}\cdot j^{-1+\varepsilon_5}\}$ почти убывает при каждом фиксированном k, и последовательность $\{\gamma_{jk}\cdot k^{-1+\varepsilon_6}\}$ почти убывает при каждом фиксированном j. Тогда из условия

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{jk}\cdot(jk)^{p-2}\cdot\lambda_{jk}^p<\infty \qquad (9)$$

следует, что

$\gamma(x,y)\cdot|\,f(x,y)\,|^p\in L(0,\pi)^2$. (10)

Теорема 4. Если последовательность γ_{mn} удовлетворяет условию: существуют $\varepsilon_7,\varepsilon_8>0$ такие, что последовательность $\{\gamma_{mn}m^{p-1-\varepsilon_7}\}$ является почти возрастающей при фиксированном n, и последовательность $\{\gamma_{mn}n^{p-1-\varepsilon_8}\}$ является почти возрастающей при фиксированном m. То условие (9) необходимо для выполнения условия (10).

Для доказательства этих теорем нам понадобятся следующие три леммы.

Лемма А.[3] Пусть $\{a_n\ge 0\},\{\lambda_n\ge 0\}$, $p\ge 1$. Тогда верны следующие неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\right)^p\le p^p\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{1-p}a_n^p\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}\lambda_\nu\right)^p \qquad (11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\left(\sum_{\nu=n}^{\infty}a_\nu\right)^p\le p^p\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{1-p}a_n^p\left(\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu\right)^p \qquad (12)$$

Эти неравенства называются неравенствами типа Харди-Лиитльвуда.

Лемма 1. Пусть $\{\lambda_{jk}\}\in R_0^+BVS^2$ и $g(x,y)$ - сумма ряда (1). Тогда имеет место неравенство

$$|g(x,y)|\le C\cdot\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{jk} \qquad (13)$$

при $x\in\left[\frac{\pi}{m+1},\frac{\pi}{m}\right)$, $y\in\left[\frac{\pi}{n+1},\frac{\pi}{n}\right)$.

Лемма 2. Пусть $\{\lambda_{jk}\}\in R_0^+BVS^2$ и $f(x,y)$ - сумма ряда (2). Тогда имеет место неравенство

$$|f(x,y)|\le C\cdot\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{jk} \qquad (14)$$

при $x\in\left[\frac{\pi}{m+1},\frac{\pi}{m}\right)$, $y\in\left[\frac{\pi}{n+1},\frac{\pi}{n}\right)$.

Доказательство леммы 1. Пусть $x\in\left[\frac{\pi}{m+1},\frac{\pi}{m}\right)$, $y\in\left[\frac{\pi}{n+1},\frac{\pi}{n}\right)$. Представим сумму $g(x,y)$ следующим образом

$$g(x,y)=\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_{jk}\sin jx\sin ky+\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_{jk}\sin jx\sin ky+$$
$$+\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_{jk}\sin jx\sin ky+\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_{jk}\sin jx\sin ky=:S^1+S^2+S^3+S^4.$$

Оценим каждое слагаемое отдельно. Для S^1 ясно, что

$$\left|S^1\right|\le\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_{jk}.$$

Для оценки S^4 сначала применим к ней преобразование Абеля [4].

$$\sum_{j=m}^{M}\sum_{k=n}^{N}\lambda_{jk}\sin jx\sin ky=\sum_{j=m}^{M-1}\sum_{k=n}^{N-1}\tilde{D}_j(x)\tilde{D}_k(y)\Delta_{11}\lambda_{jk}+$$
$$+\sum_{j=m}^{M-1}\tilde{D}_j(x)\tilde{D}_N(y)\Delta_{10}\lambda_{jN}-\sum_{j=m}^{M-1}\tilde{D}_j(x)\tilde{D}_n(y)\Delta_{10}\lambda_{jn}+$$
$$+\sum_{k=n}^{N-1}\tilde{D}_M(x)\tilde{D}_k(y)\Delta_{01}\lambda_{Mk}-\sum_{k=n}^{N-1}\tilde{D}_m(x)\tilde{D}_k(y)\Delta_{01}\lambda_{mk}+$$
$$+\lambda_{MN}\tilde{D}_M(x)\tilde{D}_N(y)-\lambda_{mN}\tilde{D}_m(x)\tilde{D}_N(y)-\lambda_{Mn}\tilde{D}_M(x)\tilde{D}_n(y)+\lambda_{mn}\tilde{D}_m(x)\tilde{D}_n(y),$$

где $\tilde{D}_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\sin kx$. Известно, что $\left|\tilde{D}_n(x)\right|\le\frac{C}{x}$ при $x\in[0,\pi)$. Учитывая это, имеем

$$\left|\sum_{j=m}^{M}\sum_{k=n}^{N}\lambda_{jk}\sin jx\sin ky\right|\le\frac{C}{xy}\left(\sum_{j=m}^{M-1}\sum_{k=n}^{N-1}\left|\Delta_{11}\lambda_{jk}\right|+\right.$$
$$+\sum_{j=m}^{M-1}\left|\Delta_{10}\lambda_{jN}\right|+\sum_{j=m}^{M-1}\left|\Delta_{10}\lambda_{jn}\right|+\sum_{k=n}^{N-1}\left|\Delta_{01}\lambda_{Mk}\right|+\sum_{k=n}^{N-1}\left|\Delta_{01}\lambda_{mk}\right|+$$
$$\left.\lambda_{MN}+\lambda_{mN}+\lambda_{Mn}+\lambda_{mn}\right)\le\frac{C}{xy}\left(C_2\lambda_{mn}+C_2\lambda_{mN}+C_2\lambda_{mn}+C_2\lambda_{Mn}+\right.$$
$$\left.+C_2\lambda_{mn}+\lambda_{MN}+\lambda_{mN}+\lambda_{Mn}+\lambda_{mn}\right).$$

Переходя к пределу при $M\to\infty, N\to\infty$, получим

$$\left|S^4\right|\le\frac{C_3}{xy}\lambda_{mn}\le C_4mn\lambda_{mn}\le C_5\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{jk}.$$

Здесь мы учли, что последовательность $\{\lambda_{jk}\}$ почти убывает. Это следует из условия принадлежности к классу $R_0^+BVS^2$.

Для оценки S^3 сначала заметим, что

$$\left|S^3\right|\le\sum_{j=1}^{m-1}\left|\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_{jk}\sin ky\right|.$$

Далее на основании преобразования Абеля имеем

$$\sum_{k=n}^{N}\lambda_{jk}\sin ky=\sum_{k=n}^{N-1}\left(\Delta_{01}\lambda_{jk}\right)\tilde{D}_k(y)+\lambda_{jN}\tilde{D}_N(y)-\lambda_{jn}\tilde{D}_{n-1}(y).$$

Следовательно, учитывая оценку $\left|\tilde{D}(y)\right|\le\frac{C}{y}\,(k\ge1,\,0<y<\pi)$ и условие $\{\lambda_{jk}\}\in R_0^+BVS^2$, при устремлении $N\to\infty$ получаем

$$\left|\sum_{k=n}^{N}\lambda_{jk}\sin ky\right|\le\frac{C}{y}\left(\sum_{k=n}^{N-1}\left|\Delta_{01}\lambda_{jk}\right|+\lambda_{jN}-\lambda_{jn}\right)\le\frac{C}{y}\left(C_2\lambda_{jn}+\lambda_{jN}\right).$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_{jk}\sin ky\right| \le \frac{C_3}{y}\lambda_{jn} \le C_4 n\lambda_{jn}.$$

Поэтому, с учетом того, что λ_{jn} почти убывает по второму индексу, получаем

$$\left|S^3\right| \le \sum_{j=1}^{m-1} C_4 n\lambda_{jn} \le C_4 \sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{jk}$$

Доказательство почти убывания: пусть $n_2 > n_1$

$$\lambda_{jn_2} = \sum_{k=n_2}^{\infty}\left(\lambda_{jk} - \lambda_{j,k+1}\right) \le \sum_{k=n_2}^{\infty}\left|\lambda_{jk} - \lambda_{j,k+1}\right| \le \sum_{k=n_1}^{\infty}\left|\lambda_{jk} - \lambda_{j,k+1}\right| \le C\lambda_{jn_1}$$

Аналогично оценивается

$$\left|S^2\right| \le C\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_{jk}.$$

Объединяя все полученные оценки для S^i $(i = 1,2,3,4)$, окончательно получим требуемое неравенство леммы.

Список использованных источников

1. Лейндлер Л. Новый класс числовых последовательностей и их приложения к синус- и косинус- рядам //AnalysisMathematica. – 2002. – Т.28. – №4. – С.279-286.
2. Тихонов С.Ю. Об интегрируемости тригонометрических рядов //Мат. заметки. – 2005. – Т.78. – №3. – С.476-480.
3. Потапов М.К., Бериша М. Модули гладкости и коэффициенты Фурье периодических функций одного переменного //Publ.Inst.Math. (Beograd) (N.S.). – 1979. – Т.26(40). – С.215-228.
4. Moricz F. On double cosine, sine, and Walsh series with monotone coefficients //Proc.Amer.Math.Soc. – 1990. – V.109.- N4. – P.417-425.