ӘОЖ 517.954

ПАРАМЕТРІ БАР ЭВОЛЮЦИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ЕКІ НҮКТЕЛІК ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕП

Жұмаділлә Жанерке Ерланқызы
jani_98_03@mail.ru
Л.Н.Гумилев атындағы ЕҰУ Іргелі математика кафедрасының студенті,
Нур-Султан, Қазақстан
Ғылыми жетекшісі –А.Ибатов

$X-$ Банах кеңістігі, $A-$ анықталу облысы X кеңістігіне тығыз орналасқан $\left(\overline{D(A)} = X\right)$ сызықты шенелмеген оператор, ал $p \in X$ параметр болсын.

$$\frac{dv}{dt} = Av + p, t \ \in (0, t_1) \qquad (1)$$

$$v(0) = v_0, v\ (t_1) = v_1 \qquad (2)$$

параметр қатысатын Банах кеңістігінде берілген дифференциалдық теңдеу үшін қойылған екі нүктелік шекаралық есебін қарастырайық. $v(t)$ абстрактілі функциясының бастапқы v_0 және соңғы v_1 мәндерін білу арқылы (1), (2) қатынасынан p параметрін және $v(t)$ функциясын табу керек.

$v(t)$ абстрактілі функциясы келесі шарттарды қанағаттандыруы керек:

1) $[0, t_1]$кесіндісінде үзіліссіз;
2) $(0, t_1]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданатын;
3) $(0, t_1]$аралығында жатқан кез келген t үшін $v(t)$ мәні $D(A)$ жату керек;
4) $(0, t_1]$аралығында $v(t)$ абстрактілі функциясы (1) теңдеуді қанағаттандыру керек;
5) $v(t)$ функциясы (2) шекаралық шартты қанағаттандыру керек.

1 –анықтама. Егер $v(t)$ жартылай тобы $t > 0$ болғанда қатаң үзіліссіз және $\lim\limits_{t \to +0} v(t)x = x, \ \forall x \in X$ теңдігін қанағаттандыратын болса, онда $v(t)$жартылай тобын C_0 класына жатады дейді.

C_0[1] класында жататын аналитикалық жартылай топ арқылы туындаған оператор қатысатын (1), (2) есебі [2] Ю.С. Эйдельман ғылыми еңбегінде қарастырылған. A операторы C_0 класында жататын кез келген жартылай топ арқылы анықталған жағдай [6] У. Ранделл ғылыми еңбегінде A операторына немесе v_0, v_1 шекаралық мәндерге қосымша шарттар қою арқылы қарастырылған. Бұл жағдайға, мысалы, Шредингер теңдеуіне қойылған шекаралық есебі сәйкес келеді.

Бұл жұмыста шексіз дифференциалданатын $T(t)\ (t > 0)$ жартылай тобы арқылы туындалған оператор қатысатын (1), (2) есебі зерттелген. Мұндай жартылай топтың нөл (t=0) нүктесінде ерекшелігі болуы мүмкін, яғни C_0 класына жатпайды.

(1), (2) есебін әрі қарай зерттеу үшін A операторына және v_0, v_1 мәндеріне қосымша шарттар қоямыз:

I) қандай да бір нақты α сандары үшін A операторының $R_\lambda(A)$резольвентасы бар болсын және $\operatorname{Re}\lambda \geq \alpha\ (\lambda = \alpha + i\tau)$ үшін

$$\|R_\lambda(A)\| \le \frac{M}{(1+|\tau|)^\beta} \quad (\tau = \operatorname{Im}\lambda,\ \ 0 < \beta \le 1) \tag{3}$$

бағалауы орындалсын.

II) v_0 және v_1 мәндері оператордың анықталу облысында жатсын, яғни $v_0, v_1 \in D(A)$.

Жоғарыдағы шарттар орындалған кезде

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = Av + p \\ v(0) = v_0 \in D(A) \end{cases}$$

Коши есебінің шешімі бар болады және ол

$$v(t) = T(t)v_0 + \int_0^t T(t-s)pds \tag{4}$$

формуласы арқылы табылады [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]. Мұндағы $T(t) - \lim\limits_{t\to+0} T(t)x = x \ \ (x \in D(A))$ қасиетке ие $t > 0$ болғанда күшті (қатаң) дифференциалданатын шенелген операторлардың жартылай тобы.

(4) формула арқылы анықталған $v(t)$ абстрактілі функциясы (1), (2) есебінің шешімі болу үшін $t = t_1$ нүктесінде

$$v(t_1) = T(t_1)v_0 + \int_0^{t_1} T(t_1 - s)pds = v_1$$

теңдігін қанағаттандыру керек. Сондықтан (1), (2) есебінің шешімділігі

$$\int_0^{t_1} T(t_1 - s)pds = v_1 - T(t_1)v_0 \tag{5}$$

теңдеуінің шешімділігіне эквивалент болады. Енді (5) теңдеуді шешімділікке зерттейміз. (5) теңдіктің көмегімен X кеңістігінен алынған әрбір p параметріне $D(A)$ жиынынан қандай да бір элементті сәйкес қоюға болады. Осы сәйкестікті анықтайтын операторды B деп белгілейік, яғни

$$B : X \to D(A), Bp = \int_0^{t_1} T(t_1 - s)pds, D(B) = X$$

Енді (1), (2) есебінің бірмәнді шешімділігіне байланысты сұрақ В операторының $D(A)$ жиынының барлық жерінде анықталған керісі бар болу сұрағына пара- пар.

$$\Gamma_q = \left\{ z : \operatorname{Re} z = \alpha - \frac{q}{m}(1+|\tau|)^\beta, q \in (0,1) \right\}$$

қисығын қарастырайық. (3) бағалаудан ([**Ошибка! Источник ссылки не найден.**] еңбектің 86 бетін қараңыз) A операторының спектрі Γ_q қисығының сол жағында орналасатындығы шығады. B операторы үшін [2] ғылыми еңбекте

$$B = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_q} \frac{e^{zt_1} - 1}{z} R_z(A)dz$$

теңдігінің орындалатындығы көрсетілген. Алдағы уақытта біз осы теңдікті пайдаланатын боламыз.

(1), (2) шекаралық есебінің бір мәнді шешімділігі A операторының спектрінің орналасуына байланысты болатындығы жайлы теорема тұжырымын келтірейік.

1 –теорема. Кез келген $v_0, v_1 \in D(A)$ үшін (1), (2) шекаралық есебінің жалғыз шешімі болу үшін $\mu_k = \dfrac{2\pi i k}{t_1}, k \neq 0 \in Z_+$ нүктелері A операторының спектріне жатпауы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі.

Кез келген $v_0, v_1 \in D(A)$ үшін (1), (2) шекаралық есебінің жалғыз шешімі бар.

Дәлелдеу керек $\mu_k = \dfrac{2\pi i k}{t_1}, k \neq 0 \in Z_+$ нүктелері A операторының спектріне жатпайтынын, яғни оның регулярлық нүктелері болатындығын дәлелдеу керек.

$$D_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_q} \frac{e^{zt_1} - 1}{z(\mu_k - z)} R_z(A)dz$$

операторын қарастырайық.

$$\frac{e^{zt_1} - 1}{z(\mu_k - z)}$$

функциясы Γ_q қисығының бойында аналитикалық функция болғандықтан қалдықтар теориясы бойынша

$$\int_{\Gamma_q} \frac{e^{zt_1} - 1}{z(\mu_k - z)} dz = 0$$

болады. Осыны ескеріп

$$(\mu_k I - A)D_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_q} \frac{e^{zt_1} - 1}{z(\mu_k - z)}(\mu_k \cdot I - A)R_z(A)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_q} \frac{e^{zt_1} - 1}{z(\mu_k - z)}dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_q} \frac{e^{zt_1} - 1}{z(\mu_k - z)}[(\mu_k I - A)R_z(A) + I]dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_q} \frac{e^{zt_1} - 1}{z(\mu_k - z)}[(\mu_k R_z(A) - AR_z(A) + I]dz$$

теңдігін аламыз. Бұдан

$$AR_z(A) = zR_z(A) + I$$

болатындығын ескеріп

$$(\mu_k I - A)D_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_q} \frac{e^{zt_1} - 1}{z(\mu_k - z)}[\mu_k R_z(A) - zR_z(A) - I + I]dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_q} \frac{e^{zt_1} - 1}{z(\mu_k - z)}[\mu_k R_z(A) - zR_z(A)]dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_q} \frac{e^{zt_1} - 1}{z(\mu_k - z)}[(\mu_k - z)R_z(A)]dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_q} \frac{e^{zt_1} - 1}{z} R_z(A)dz = B$$

теңдігіне келеміз. Сондықтан

$$\forall x \in X : Bx = (\mu_k I - A)D_k x \qquad (6)$$

теңдігі орынды. (1), (2) шекаралық есебінің шешімділігі B операторының $D(A)$ жиынының барлық жерінде анықталған, керісі бар болуына пара- пар болғандықтан B операторының $D(A)$ жиынының барлық жерінде анықталған B^{-1} керісі бар болады. Осыны ескеріп (6) теңдіктен келесі теңдікке келеміз

$$B^{-1}Bx = B^{-1}(\mu_k I - A)D_k x = (\mu_k I - A)B^{-1}D_k x.$$

$B^{-1}D_k$ операторы X кеңістігінің барлық жерінде анықталған шенелген $\mu_k I - A$ операторына кері оператор болады. Сондықтан μ_k нүктелері А операторының регулярлық нүктелері болады.

Жеткіліктілігі. $\mu_k = \dfrac{2\pi i k}{t_1}, k \neq 0 \in Z_+$ нүктелері А операторының регулярлық нүктелері болсын. (1), (2) шекаралық есебінің жалғыз шешімі бар болатындығын дәлелдейік. Бізге В операторының $D(A)$ жиынының барлық жерінде анықталған керісі болатындығын көрсеткен жеткілікті. В операторының керісі болатындығы [2] еңбекте көрсетілген схема бойынша дәлелденеді. Енді (1), (2) шекаралық есебіне қатысатын белгісіз $v(t)$ және р параметрі v_0, v_1 шекаралық мәндерге қалай тәуелді болатындығын анықтайық.

1 –мысал. $u_1(x), u_2(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ жататын $u(x) = \left(u_1(x), u_2(x)\right)$ вектор функциялар кеңістігінде берілген

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + p_1(x) & u_1\big|_{t=0} = u_1^0(x), u_1\big|_{t=t_1} = u_1^1(x) \qquad (7) \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = -i\dfrac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + p_2(x) & u_2\big|_{t=0} = u_2^0(x), u_2\big|_{t=t_1} = u_2^1(x) \qquad (8) \end{cases}$$

екі теңдеуден тұратын жүйеге қойылған екі нүктелік шекаралық есебін қарастырайық.

Мұндағы $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))$ және $p(x) = (p_1(x), p_2(x))$ векторлары белгісіздер, ал А - $v(x) = (v_1(x), v_2(x))$, мұндағы $v_1(x), v_2(x)$ сәйкес жалпыланған туындылары бар және олар $L_2(-\infty, +\infty)$ кеңістігінде жататын, вектор –функциялар жиынында анықталған, әсері

$$Av = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} & 0 \\ -i\dfrac{\partial^3 v_1}{\partial x^3} & \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

матрицасы арқылы берілген оператор.

[**Ошибка! Источник ссылки не найден.**] еңбектің 198 бетінде оң жақ жарты жазықтықта А операторының резольвентасы болатындығы және $\beta = \dfrac{1}{2}$ болғанда резольвента (3) бағалауды қанағаттандыратындығы көрсетілген. А операторымен туындайтын жартылай тобы нөл нүктесінде ерекшелікке ие болады. А операторының спектрі нөл нүктесінен басқа жорамал осьтің ешбір нүктесін қамтымайды. Сондықтан 1 –теорема тұжырымы бойынша (7), (8) шекаралық есебінің $\left(\left(u_1^0(x), u_2^0(x)\right), \left(u_1^1(x), u_1^1(x)\right)\right) \in D(A)$ үшін жалғыз шешімі бар болады.

Қолданылған әдебиеттер тізімі

1. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. –М.: Наука, 1967,Т-16016. -С. 11-37.
2. Эйдельман Ю.С. Разрешимость граничный задачи для дифференциальногоуравнения в банаховом пространстве с неограниченным оператором и неизвестным параметром. Рукопись деп. в ВИНИТИ 5.1.1981г., 44-81.- 14 с.
3. Rundell W. Determination of on unknown non-Homoge-neous Term in a Linear Partial Differential Equations from the overspecified Boundary Data. –Appl.Anl., 10.-№3.-1980, P. 231-242.